



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

FAKULTA PODNIKATELSKÁ

FACULTY OF BUSINESS AND MANAGEMENT

ÚSTAV INFORMATIKY

INSTITUTE OF INFORMATICS

HRA O TRHY

GAME OF MARKETS

DIPLOMOVÁ PRÁCE

MASTER'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

Bc. Aneta Dóczy

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

RNDr. Zuzana Chvátalová, Ph.D.

BRNO 2017

Zadání diplomové práce

Ústav: Ústav informatiky
Studentka: **Bc. Aneta Dóczy**
Studijní program: Systémové inženýrství a informatika
Studijní obor: Informační management
Vedoucí práce: **RNDr. Zuzana Chvátalová, Ph.D.**
Akademický rok: 2016/17

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č. 111/1998 Sb., o vysokých školách ve znění pozdějších předpisů a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně zadává diplomovou práci s názvem:

Hra o trhy

Charakteristika problematiky úkolu:

Úvod
Vymezení problému a cíle práce
Teoretická východiska práce
Analýza problému a současné situace
Vlastní návrhy řešení, přínos návrhů řešení
Závěr
Seznam použité literatury
Přílohy

Cíle, kterých má být dosaženo:

Konstrukce ekonomických jevů s využitím matematických metod.
Analýza počítačových algebraických systémů – jejich srovnání a použití pro teorii her.
Analýza teorie her a konfliktních situací.
Zobrazení a realizace základních typů her.
Modelování problematiky v prostředí Maple, využití vybraných diferenciálních rovnic.
Konstrukce modelů ekonomických jevů s časovým zpožděním v oblasti teorii her.

Základní literární prameny:

AXELROD, Robert M. The evolution of cooperation. New York: Basic Books, c1984. 264 s. ISBN 0-465-02122-0.

CHVÁTALOVÁ, Zuzana, Jiří HŘEBÍČEK, Miloš KOCH a Petr KALABIS. Corporate Performance Analysis Using the Maple system: Integration of Theory and Practice. Perspectives of Business and Entrepreneurship Development. Brno: Faculty of Business and Management Brno University of Technology, 2015. s. 44-44. ISBN 978-80-214-5198-8.

KOLMANOVSKIJ, Vladimir Borisovič a Anatolij Dmitrijevič MYŠKIS. Introduction to the theory and applications of functional differential equations. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, c1999. Mathematics and its applications, vol. 463. 648 s. ISBN 0-7923-5504-0.

MARUŠIAK, Pavol a Rudolf OLACH. Funkcionálne diferenciálne rovnice. Žilina: Žilinská univerzita, 2000. 133 s. ISBN 80-7100-714-5.

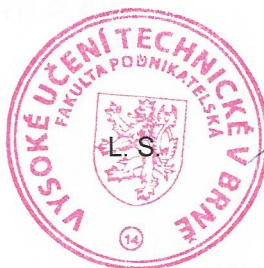
NEUMANN, John a Oskar MORGENSTERN. Theory of games and economic behavior. Princeton: Princeton University Press, 1990. 641 s. ISBN 0-691-00362-9.

Termín odevzdání diplomové práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2016/17.

V Brně, dne 28. 2. 2017



doc. RNDr. Bedřich Půža, CSc.
ředitel



doc. Ing. et Ing. Stanislav Škapa, Ph.D.
děkan

ABSTRAKT

Diplomová práce se zabývá konfliktními ekonomickými situacemi založené na teorii her. Na začátku jsou definovány základní modely konfliktních situací a současné populární softwarové nástroje nejen pro obecnou podporu výuky studentů nebo pro vědní obory, ale právě i pro řešení ekonomických úloh v teorii her. Na základě této analýzy je řešena konfliktní situace dvou navzájem si konkurujících firem. Postupně se práce dostává hlouběji do oblastí diferenciálních rovnic se zpožděním, které lépe zobrazují chování dvou hráčů na trhu. Následně jsou tyto zpožděné diferenciální rovnice promítnuty do Cournotova modelu, pro který se zjistí kritická hodnota, která přepíná stabilitu dvou firem na trhu v důsledku zpožděné realizace jejich výstupů.

KLÍČOVÁ SLOVA

Cournotův model, duopol, počítačové algebraické systémy, Maple, Nashova rovnováha, teorie her, diferenciální rovnice se zpožděním

ABSTRACT

This diploma thesis deals with conflict economic situations based on game theory. In the beginning, basic models of conflict situations and current popular software tools are defined not only for the general support of student education or for science, but also for solving economic problems in game theory. Based on this analysis, the conflicting situation of two competing firms is being solved. Gradually, work goes deeper into areas of delay differential equations that better show the behavior of two players on the market. Subsequently, these delayed differential equations are projected into the Cournot model, for which a critical value is identified that switches the stability of two firms on the market due to the delayed realization of their outputs.

KEYWORDS

Cournot model, duopoly, computer algebra system, Maple, Nash Equilibrium, game theory, delay differential equations

DÓCZY, Aneta. *Hra o trhy*. Brno, 2017, 110 s. Diplomová práce. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta podnikatelská, Ústav informatiky. Vedoucí práce: RNDr. Zuzana Chvátalová, Ph.D.

PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že svou diplomovou práci na téma „Hra o trhy“ jsem vypracovala samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a s použitím odborné literatury a dalších informačních zdrojů, které jsou všechny citovány v práci a uvedeny v seznamu literatury na konci práce.

Jako autorka uvedené diplomové práce dále prohlašuji, že v souvislosti s vytvořením této diplomové práce jsem neporušila autorská práva třetích osob, zejména jsem nezasáhla nedovoleným způsobem do cizích autorských práv osobnostních a/nebo majetkových a jsem si plně vědoma následků porušení ustanovení § 11 a následujících autorského zákona č. 121/2000 Sb., o právu autorském, o právech souvisejících s právem autorským a o změně některých zákonů (autorský zákon), ve znění pozdějších předpisů, včetně možných trestněprávních důsledků vyplývajících z ustanovení části druhé, hlavy VI. díl 4 Trestního zákoníku č. 40/2009 Sb.

Brno

.....

podpis studenta

PODĚKOVÁNÍ

Ráda bych poděkovala vedoucí práce RNDr. Zuzaně Chvátalové, Ph.D. za odborné vedení a poskytování rad, které mi pomohly při zpracování diplomové práce. Mé poděkování také patří panu doc. RNDr. Janu Čermákovi, CSc., za jeho ochotu a čas, potřebný pro pochopení matematických složitostí. Rovněž děkuji své rodině za podporu a velkou trpělivost po celou dobu mého studia.

Brno

.....

podpis studenta

OBSAH

Úvod	13
Vymezení problému a cíle práce	14
1 Teoretická východiska práce	15
1.1 Teorie her	15
1.2 Základní obsah hry	15
1.2.1 Hra	15
1.2.2 Hráči	15
1.2.3 Strategie	15
1.2.4 Výplata	16
1.3 Základní klasifikace her	17
1.4 Forma her a zobrazení her	19
1.4.1 Normální forma hry	19
1.4.2 Dvojmaticová hra	20
1.5 Hra o trh a model oligopolu	21
1.5.1 Oligopol	21
1.5.2 Model kartelu a trest pro hráče	21
1.6 Modely a systémy	22
1.6.1 Dynamický systém	22
1.6.2 Systémy a jejich stabilita	23
1.7 Matematické modelování s využitím ICT	25
1.7.1 Výběr matematických rovnic pro modelování s ICT	26
1.7.2 Diferenciální rovnice s posunutým argumentem	27
1.7.3 Počáteční úloha	28
1.7.4 Ordinary Delay Differential Equations – řešení metodou kroků	29
1.7.5 Ordinary Delay Differential Equations – řešení metodou kroků v systému Maple	30
2 Analýza současného stavu	31
2.1 Počítačové algebraické systémy	32
2.1.1 Systém MATLAB (<i>Matrix Laboratory</i>)	32
2.1.2 Systém R	33
2.2 Maple	34
2.2.1 Verze Maple 2016	36
2.2.2 Verze software Maple	36
2.2.3 Maple a základní syntaxe	37

2.2.4	Maple HELP Systém	38
2.2.5	Maple a vizualizace dat	38
2.2.6	Analýza softwarové algebry navzájem, zhodnocení	39
2.3	Současné výzkumy v teorii her s podporou CAS	40
2.3.1	Obecná rovnováha ve hře	40
2.3.2	Maximin vs. minimax strategie – sedlový bod	40
2.3.3	Nashova rovnováha	41
2.3.4	Tvrzení o Nashově rovnováze	42
2.3.5	Striktně dominované vs. dominantní strategie	42
2.3.6	Demonstrace Nashovy rovnováhy č. 1	43
2.3.7	Demonstrace Nashovy rovnováhy č. 2	45
2.3.8	Eliminace dominovaných strategií	48
2.3.9	Ověření tvrzení o Nashově rovnováze	51
2.4	Řešení dvojmaticových her	52
2.4.1	Jestřáb a holub (The Hawk-Dove Game)	52
2.4.2	Vězňovo dilema (Prisoner's dilemma)	54
2.4.3	Kámen, nůžky, papír	56
2.5	Hry s opakováním	57
2.5.1	Opakované vězňovo dilema – Axelrodův turnaj	57
2.5.2	Simluace Axelrodova turnaje	60
3	Vlastní návrhy řešení	63
3.1	Cournotův model	63
3.2	Statický Cournotův model	66
3.2.1	Cournotova rovnováha	68
3.2.2	Izo-křivky	70
3.3	Dynamický Cournotův model	73
3.3.1	Cournotův model se zpožděním – algebraické řešení	75
3.3.2	Cournotův model se zpožděním – prostředí Maple	90
3.4	Shrnutí získaných výsledků	101
4	Přínos návrhu řešení	102
5	Závěr	103
	Literatura	104
	Seznam symbolů, veličin a zkratk	108
	Seznam příloh	109

A	Obsah přiloženého CD	110
A.1	Příkazy používané ve zdrojových souborech	110

SEZNAM OBRÁZKŮ

1.1	Princip modelování (Zdroj: Vlastní zpracování podle [30])	22
1.2	Matematické modelování s využitím ICT (Zdroj: [12], s. 15)	25
1.3	Metoda kroků v prostředí Maple (Zdroj: Vlastní zpracování)	30
2.1	Maple logo (Zdroj: ²⁾	34
2.2	Symbolické vyjádření v prostředí Maple (Zdroj: Vlastní zpracování) .	35
2.3	Numerické vyjádření v prostředí Maple (Zdroj: Vlastní zpracování) .	35
2.4	Základní syntaxe v prostředí Maple pro derivaci, integrování a řešení rovníc (Zdroj: Vlastní zpracování)	37
2.5	Základní syntaxe pro vykreslení funkcí v systému Maple 2016 (Zdroj: Vlastní zpracování)	38
2.6	Analýza cen CAS dle nejnovější verze (Zdroj: Vlastní zpracování podle informací ze [20], [23], [33], [40])	39
2.7	Nashova rovnováha a Paretoovo optimum (MATLAB) (Zdroj: Vlastní zpracování podle ⁵⁾	47
2.8	Matice hry – marketingová kampaň (Zdroj: Vlastní zpracování) . . .	49
2.9	První eliminace dominované strategie – marketingová kampaň (Zdroj: Vlastní zpracování)	49
2.10	Druhá eliminace dominované strategie – marketingová kampaň (Zdroj: Vlastní zpracování)	50
2.11	Matice hry – výsledek marketingové kampaně (Zdroj: Vlastní zpra- cování)	51
2.12	Wolfram Demonstration Program pro hru kámen, nůžky, papír (Zdroj: ⁹⁾	56
2.13	Kooperativní výplata – světlá oblast a individuální výplata – tmavá oblast (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)	59
2.14	Model 1: Vězňovo dilema (NetLogo) – Kooperace vs. TFT (Zdroj: Vlastní zpracování)	60
2.15	Model 2: Vězňovo dilema (NetLogo) – Zrazovat vs. TFT (Zdroj: Vlastní zpracování)	61
2.16	Model 3: Vězňovo dilema (NetLogo) – Zrazovat vs. Neodpouštět (Zdroj: Vlastní zpracování)	61
2.17	Model 4: Vězňovo dilema (NetLogo) – Náhodné tahy vs. Neodpouštět (Zdroj: Vlastní zpracování)	62
3.1	Výstupy a reakční křivky Cournotova modelu (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)	69
3.3	Izoziskové křivky K1 (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)	71
3.4	Izoziskové křivky CS2 (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)	71
3.5	Izoziskové křivky K1 vs. CS2 (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování) . .	72

3.6	Cournotův model a jeho vstupní proměnné (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)	92
3.7	Cournotův model fáze I (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)	93
3.8	Cournotův model fáze II (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)	94
3.9	Cournotův model fáze III (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)	95
3.10	Cournotův model vstupní proměnné (dvě zpoždění) (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)	96
3.11	Cournotův model fáze IV (dvě zpoždění) (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)	97
3.12	Cournotův model fáze IV (dvě zpoždění) detail (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)	98
3.13	Cournotův model fáze V (dvě zpoždění) (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)	99

SEZNAM TABULEK

1.1	Zobrazení dvojmaticové hry (Zdroj: Vlastní zpracování)	20
2.1	Matice hry pro poskytovatele ERP systému (Zdroj: Vlastní zpracování)	43
2.2	Matice hry pro poskytovatele ERP systému – Nashovy rovnováhy (Zdroj: Vlastní zpracování)	44
2.3	Výplatní matice mobilních operátorů (Zdroj: Vlastní zpracování) . . .	45
2.4	Výplatní matice mobilních operátorů – Nashova rovnováha (Zdroj: Vlastní zpracování)	46
2.5	Maximin strategie – mobilní operátoři (Zdroj: Vlastní zpracování) . .	46
2.6	Matice hry – jestřáb a holub (Zdroj: Vlastní zpracování)	52
2.7	Jestřáb a holub (příklad) (Zdroj: Vlastní zpracování)	53
2.8	Matice trestu – věžňovo dilema (Zdroj: Vlastní zpracování)	54
2.9	Matice trestu – věžňovo dilema – řešení (Zdroj: Vlastní zpracování) .	55
2.10	Matice hry – kámen, nůžky, papír (Zdroj: Vlastní zpracování)	56
2.11	Výplatní funkce hráče I a hráče II (Zdroj: Vlastní zpracování)	58
2.12	Výsledky turnajů – iterované věžňovo dilema (1120 kol) (Zdroj: Vlastní zpracování)	62
3.1	Výsledky stability dynamického Cournotova modelu (Zdroj: Vlastní zpracování)	101
A.1	Přehled příkazů pro prostředí Maple 2016	110

ÚVOD

„Ve snu je typické nebýt racionální“ – John Forbes Nash.

V reálném světě (v našem systému) může každý jedinec hrát hry několikrát za den. V mnoha případech si toho nejsme ani vědomi, ale neustále provádíme tahy, abychom ze hry vyšli jako vítězové – pokud myslíme racionálně.

Stejně tak nositel Nobelovy ceny za ekonomii, matematik John Forbes Nash, hrál každý den před svou tragickou smrtí hru se svou schizofrenií, a i přes tento boj objevil rovnováhu v nekooperativních hrách, která je dnes známá jako Nashova rovnováha NE (*z angl. Nash Equilibrium*).

Teorie her byla vyvinuta Johnem Von Neumannem a Oskarem Morgensternem a ve své první knize ji aplikují ve dvou směrech, a to ve směru hry ve správném slova smyslu a ve směru hry v oblasti ekonomických a sociálních problémech.

Častokrát pro řešení praktických úloh v literaturách nejen v matematických disciplínách vědy a techniky, ale i v životě je použito obyčejných diferenciálních rovnic ODEs (*z angl. Ordinary Differential Equations*). Nicméně, pro přiblížení se k realitě nebývá tento popis dostačující. Pro dynamiku a zachycení reality bývají použity diferenciální rovnice se zpožděním – ODDEs (*z angl. Ordinary Delay Differential Equations*), které umožní zkoumat chování systému při jeho posunech k ohledech faktoru času.

Propojením těchto tří vstupů – podstaty teorie her, hledání rovnováhy a použití ODDEs bude konstruována tato práce a popsány její výstupy.

VYMEZENÍ PROBLÉMU A CÍLE PRÁCE

Vymezení problému

Tato práce se zabývá teorií her, ekonomickou a matematickou sférou pro pochopení a nalezení řešení konfliktních situací. Přináší poznatky, které jsou použité pro sestavení modelů ekonomických jevů se zpožděním v čase s využitím počítačových algebraických systémů.

Implementace zpoždění vystihují detailněji realitu ekonomického prostředí a rozhodování firem, a to především z důvodu, že získat informace o konkurenci a její strategii obecně pojme určitý čas. Základem úspěchu ve hře o trh je „hrát“ ji s informací o konkurenčním prostředí.

Tím jsou současně vymezeny i využití metod v práci.

Cíle práce

Hlavním cílem této práce je zpracovat prostředí dvou konkurentů pomocí matematických modelů, jejichž vývoj nebo budoucí stav se odvíjí nejen od přítomného stavu, ale i stavu minulého a tyto modely zpracovat v prostředí algebraického software Maple.

K naplnění hlavních cílů je nutné naplnit **cíle dílčí**.

Kapitola první bude vymezovat základní pojmy, teorie, rovnice a poznatky, které proniknou do kapitoly druhé.

Obsahem kapitoly druhé bude analýza současného stavu výzkumu teorii her, aktuálních vědeckých činností v této oblasti a její podpory prostřednictvím počítačových algebraických systémů.

Návrh vlastního řešení bude zpracován v kapitole třetí, kde bude definován vymezený problém konfliktní situace a ten se následně algebraickým postupem zpracuje a dovede problém k jednomu z možných řešení. Získané řešení se transformuje pomocí softwarové podpory do grafické podoby, která bude sloužit jako verifikace dosažených výsledků a bude vyvozeno celkové zhodnocení.

1 TEORETICKÁ VÝCHODISKA PRÁCE

Tato kapitola obsahuje základní teoretické pojmy a prostředky, které jsou nezbytné pro následné zpracování a aplikaci vybraných problematik.

1.1 Teorie her

Teorie se zabývá hrou, kde racionálně chovající se jedinci volí jednu se svých možností (strategií), aby dosáhli svého maximálního užitku. Otázkou je, kdy označíme jedince jako racionálního? Klasická teorie her označí racionálního jedince takového, který ze svých dostupných strategií vybere tu, která ho maximálně uspokojí. [[16], s. 23]

Teorie her změnila pohled mnoha lidem, zejména vědcům a ekonomům na problematiku jak makroekonomie tak mikroekonomie. Jsou použité pro reálné situace v ekonomice, politice, obchodních a dalších oblastech. Dokonce i válku lze analyzovat pomocí teorie her.

1.2 Základní obsah hry

1.2.1 Hra

Hry lze chápat jako konfliktní situace. Představují mechanismus pravidel, do kterého hráči vstupují se svými strategiemi. Hra vyhodnocuje jejich zvolené strategie a hráčům rozdělí výplaty (užitky). [[16], s. 16]

1.2.2 Hráči

Hráči, které označíme jako i, j jsou ti, kteří volí různé strategie. Každý hráč, jedná **racionálně** – chce-li maximalizovat užitek pro sebe. V modelech užitečnosti se předpokládá, že racionální jedinec disponuje všemi potřebnými znalostmi a informacemi. [[16], s. 19], [[26], s. 114]

1.2.3 Strategie

V normální formě hry jsou strategie definovány

s_i – konkrétní strategie hráče i

S_i – množina možných strategií hráče i

(s_1, \dots, s_n) – kombinace všech možných strategií hráče i [[10], s. 4]

Ideální strategie je ta, která zajistí úspěch a může zničit druhého hráče. [31]

Způsob provedení jednotlivých tahů lze rozdělit na

1. **simultánní tahy** - tahy jsou prováděny hráči současně. Jedná se o hry, ve kterých hráči v okamžiku volby neznají zvolené strategie ostatních.
2. **sekvenční tahy** - tahy jsou prováděny hráči postupně, jeden za druhým. Tak hráči mohou získat informace o volbách strategií druhých hráčů.

[[16], s. 19]

Dynamika hry promítá střídající se tahy hráčů. Každý „dobyvatel“ by chtěl získat „hlavní trůn“.

1.2.4 Výplata

Pro výplatu zavedeme následující označení

$u_i(\vec{s})$ – výplaty hráče při kombinaci strategií $\vec{s} = (s_1, \dots, s_n)$, které se skládají z vlastní strategie a ze strategií protihráčů,

U_i – množina všech výplat hráče i

Výše výplaty závisí na volbě strategií ostatních hráčů $u_i(s_1, \dots, s_2)$. Výplata představuje výsledek, který každý hráč získá na konci hry. Vyšší výplatu bude preferovat každý hráč před výplatou nižší. Pokud hráč myslí *racionálně*, chce maximalizovat svou výplatu. V opačném případě hráč přemýšlí *iracionálně* (nechce jednat ve vlastním zájmu). [31], [34]

Hra je jakákoliv interakce mezi několika hráči, ve které je zisk každého hráče ovlivněn rozhodnutím ostatních. Hru lze rozlišit na

Statická hra

Ve statické hře hráči provádějí své tahy izolovaně, aniž by věděli, co ostatní hráči udělali. Platí

1. Každý hráč má úplnou informaci o strategiích protihráče, a také úplnou informaci o výplatní funkci
2. Hráči volí tahy nezávisle na sobě. Kombinace tahů hráčů vede k výsledku hry a k celkové výplatě

Dynamická hra

Je součástí následující třídy jednoduché hry o úplné a dokonalé informaci. Dynamická hra je jakákoliv hra, kde lze identifikovat následující tři fakta

1. První hráč volí akci s_1 ze své množiny strategií
2. Druhý hráč obdrží akci s_1 prvního hráče a potom volí svou akci s_2 , ze své množiny strategií
3. Výplatní funkce je pro prvního hráče $u_1(s_1, s_2)$ a pro druhého hráče je výplatní funkce $u_2(s_1, s_2)$

1.3 Základní klasifikace her

Hry je možné klasifikovat

1. **Kolik je počet hráčů** – ve většině případech uvažujeme situace dvou a více hráčů (lze ovšem i hrát hazardní hry sám se sebou).
2. **Simultánní a sekvenční** – v simultánní hře volí každý hráč jeden tah, přičemž tahy jsou hrány souběžně, hráč v momentě volby svého tahu neví, jakou strategii volí ostatní hráči. Naproti tomu v sekvenční hře neprovádí tahy ve stejnou dobu, hráči volí tahy postupně (několikrát) – volí tah první hráč, pak druhý.
3. **Hry s nulovým součtem** – hry splňují podmínku, že součet výplat hráčů je roven nule neboli to, co jeden hráč získá, (tu stejnou hodnotu) druhý hráč ztratí. [[32], s. 26] Tzn. součet jejich výplat při zvolení určitých strategií je nula. Opakem je *hra s nenulovým součtem*.
4. **Hry s konstantním součtem** – součet výplat hráčů je nějaká konstanta, tyto hry lze obdobně řešit jako hry s nulovým součtem (přičtením nebo odečtením konstanty od výplaty lze opět dostat nulový součet).
5. **Hry s nekonstantním součtem** – představuje chování hráčů například na změnu vkladu, změnu situace na trhu, vstup zdanění v čase.
6. **Hry s úplnou informací** – hráči znají strukturu hry, veškeré tahy protihráčů a výplatní funkci. [[16], s. 18]

7. **Hry s neúplnou informací** – jsou více reálné v rámci světa, hráči neznají některý ze základních parametrů hry (výše výplaty, množinu strategií protihráče) a proto jsou obtížně analyzovatelné. [[16], s. 18]
8. **Nekooperativní hry** – hráči se nemohou předem domlouvat. Představa dvou hráčů, kteří spolu vyjednávají, ještě neznamena, že jejich ujednání budou nakonec platná. Hráči proto mohou v důsledku toho volit jiné tahy i přes sjednané podmínky předtím. [32]
9. **Kooperativní hry** – hráči se seskupují do podmnožin, ve kterých se dohodnou, jaké budou volit strategie tzv. *koalice*. [[16], s. 28] Jsou definovány podmínkou, kdy lze výsledek sjednání vložit do smlouvy a následně uplatnit.
10. **Jednokolové hry** – hráči hrají hru jednou, vyberou si své výplaty, a tím konflikt končí. V této situaci hráči volí své strategie na základě znalosti, že hra již dále nepokračuje.
11. **Vícekolové hry** – v opakované hře hráči mohou volit nové tahy, vždy před každým kolem. Nastává situace, kdy hráči musejí uvažovat více kol dopředu.
12. **Symetrické hry** – hráči disponují stejným počtem strategií.
13. **Asymetrické hry** – hráči nemají rovnocenné postavení. Někteří z hráčů mají méně nebo více strategií oproti ostatním. [16], [32]
14. **Antagonistické hry** – Hra dvou hráčů s konstantním součtem (nekooperativní hra). [[3], s. 2]

Příklad hry s nulovým vs. nenulovým součtem

Existuje speciální případ hry normální-formy, kdy pro hráče i, j jsou výplaty $u_1(s_1, s_2) + u_2(s_1, s_2) = 0$, a to pro všechna $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$.

Tento případ je označen jako hra s nulovým součtem. Bývá více používán zápis $u_1(s_1, s_2) = -u_2(s_1, s_2)$ [28], tzn. výplata hráče se rovná ztrátě jeho protihráče. [25]

Tato forma je charakteristická pro hru „kámen, nůžky, papír“, kdy z prohry získám 1 Kč a protihráč přijde o 1 Kč $\rightarrow 1 - 1 = 0$ (řešeno konkrétněji v další kapitole). [[32], s. 5]

1.4 Forma her a zobrazení her

K zobrazení hry lze použít dva nástroje

1. **Rozhodovací strom** – slouží k zobrazení *extenzivní formy* hry, kde záleží na pořadí tahu.
2. **Výplatní matice** – slouží k zobrazení *normální formy* hry (viz další kapitola). [[34], s. 22]

1.4.1 Normální forma hry

Nechť je dána konečná neprázdná N -prvková množina $H = \{1, \dots, N\}$, N množin S_1, \dots, S_N a N omezených reálných funkcí U_1, \dots, U_N definovaných na kartézském součinu $S_1 \times \dots \times S_N$.

Hrou dvou hráčů v *normálním tvaru* rozumíme uspořádanou $(2N + 1)$ tici. [16]

$$G = \{H, S_1, \dots, S_N, U_1, \dots, U_N\} \quad [[16], \text{ s. 17}] \quad (1.4.1)$$

kde

množina H představuje množinu hráčů,

množina $u_i, i = 1, \dots, N$ je výplatní funkce hráče i . Kladné u_i je pro hráče i výplatou, záporné u_i pak ztrátou.

Podmnožina množiny H se nazývá *koalice* L . Jedná se o spojenou strategii hráčů (*koalice*) $L \subseteq H, L = \{i_1, \dots, i_l\}$ a značíme $s_l \in S_l$, kde $S_L = S_{i_1} \times \dots \times S_{i_l}$ je prostor spojených strategií hráčů z L . [[16], s. 17]

Dále si položíme otázku *Jaké je strategické chování mého konkurenta?*

Pro řešení takové otázky je využita teorie her, tyto hry jsou základně rozděleny do následujících dvou struktur, jak bylo výše zmíněno

1. **Kooperativní hra** – snaha dosáhnout určité shody, např. uzavírání „tajné“ dohody o cenách neboli tzv. kartely – „dohody narušující soutěž“, tvorba koalic v politice.
 2. **Nekooperativní hra** – snaha dosáhnout pouze vlastního dobra, např. jde o konfliktní situace. Zahrnuje interakce mezi hráči, ve kterých bude vždy nějaký vítěz nebo poražený.
- [11]

1.4.2 Dvojmaticová hra

Hra v prostoru dvou hráčů i, j znázorňující matice je nazývána jako **dvojmatice** (výplaty hráčů jsou zaznamenány do jedné matice).

Hráč i má k dispozici n strategií (s_1, s_2, \dots, s_n) a hráč j volí mezi m strategiemi (t_1, t_2, \dots, t_m) . Pokud platí rovnost $n = m$, jedná se o **symetrickou** hru.

Při hledání řešení ve hře dvou hráčů, budeme značit prvky hry následovně

Hráč i má konečnou množinu strategií $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$

Hráč j má konečnou množinu strategií $T = \{t_1, t_2, \dots, t_m\}$

Označení výplaty (výplat) při volbě strategií s_i, t_j je pro dva hráče následující

$u_1(s_i, t_j)$ – výplata pro hráče 1, při volbě strategií s_i a t_j (hráče i budeme značit jako hráče prvního a j jako druhého hráče)

$u_2(s_i, t_j)$ – výplata pro hráče 2, při volbě strategií s_i a t_j

$u_{ij} = (U_1(i, j), U_2(i, j)), i, j \in \{1, 2\}$

U_1 – matice všech výplat hráče 1

U_2 – matice všech výplat hráče 2

$U = \{u_{ij}\}_{i,j \in \{1,2\}}$ – výplatní dvojmatice obou hráčů

[13], [16], [28], [31]

Čísla v matici reprezentují užitky pro hráče, neboli to, co chtějí hráči maximalizovat (výplaty, zisky, výhry, ...), resp. minimalizovat (ztráty, pokuty, ...). Forma dvojmatice pro hráče 1 a hráče 2, kde $n = 2$ a $m = 2$

		Hráč 2	
		Strategie t_1	Strategie t_2
Hráč 1	Strategie s_1	$u_{11} = (\textcolor{red}{s}_1, \textcolor{green}{t}_1)$	$u_{12} = (\textcolor{red}{s}_1, \textcolor{green}{t}_2)$
	Strategie s_2	$u_{21} = (\textcolor{red}{s}_2, \textcolor{green}{t}_1)$	$u_{22} = (\textcolor{red}{s}_2, \textcolor{green}{t}_2)$

Tab. 1.1: Zobrazení dvojmaticové hry (Zdroj: Vlastní zpracování)

1.5 Hra o trh a model oligopolu

1.5.1 Oligopol

Charakteristické rysy jsou

existence několika firem v odvětví; produkt může být diferencovaný (př. různé ústní vody) nebo homogenní (př. kukuřice); existence bariér znemožňující vstup ostatních firem do odvětví; každá firma je natolik silná, že si stanoví vlastní cenu P vyšší než mezní náklady MC , kde Q je množství $P(Q) > MC(Q)$. [36]

Dva hráči, jeden produkt aneb prostředí duopolu – velmi stručně řečeno jedná se o ztělesnění hry o trh dvou oligopolů. Nejznámější příklady duopolů jsou společnosti McDonald's vs. KFC, Coca-Cola vs. Pepsi.

1.5.2 Model kartelu a trest pro hráče

Předpokladem pro model kartelu je, že společnosti mohou předem uzavřít dohodu o výrobních množstvích. Pokud obě firmy myslí racionálně, uzavřou dohodu, která je pro obě výhodná. Pokud tedy dvě firmy uzavřou takovou dohodu, sníží se konkurence na trhu a o tím dosahují vyšší zisky. [16]

Kartel maximalizuje společné zisky tím, že se dvě společnosti chovají jako jeden monopol – omezuje výstup a zvyšuje cenu. [34]

Úřad pro ochranu hospodářské soutěže je hlavní orgán, který nejen dohlíží, ale i reguluje hru na trhu.

Kartelové dohody ztělesňují nejzávažnější porušení zákona a mají závažný dopad na ekonomiku i konečného spotřebitele. Nejznámějším příkladem zakázaných dohod jsou dohody o přímém stanovení cen.

Spotřebitel v takových případech nemá možnost nakupovat zboží či služby za konkurenční ceny, ale pouze za ceny určené kartelovou dohodou, které jsou ve většině případech vyšší. Negativní dopad kartelu se projeví omezením nebo přímo vyloučením konkurence mezi současnými či potenciálními soutěžiteli.¹

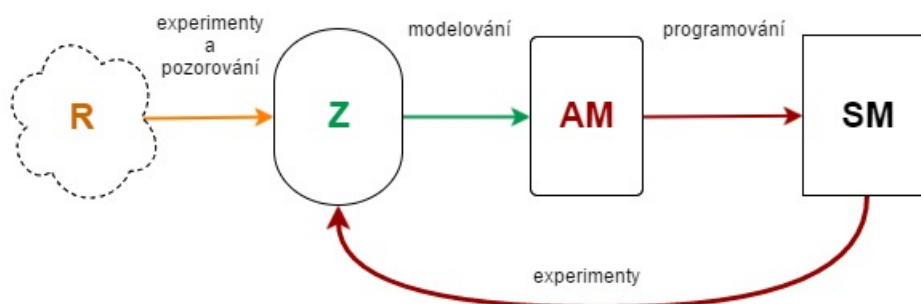
¹*Zakázané dohody – kartely* [Online]. Brno: Úřad pro ochranu hospodářské soutěže, [cit. 2016-11-03]. Dostupné z: <<https://www.uohs.cz/cs/verejne-zakazky/osveta-a-transparentnost-verejnych-zadavatelu.html>>

1.6 Modely a systémy

Pojem *model* dává do podvědomí intuitivní definici *zjednodušený obraz reality*, z jiného úhlu pohledu vysvětlíme model jako *napodobeninu systému jiným systémem*. [30]

Princip modelování

Realita $\mathbf{R} \mapsto$ Znalosti $\mathbf{Z} \mapsto$ Abstraktní model $\mathbf{AM} \mapsto$ Simulační model \mathbf{SM} . [30]



Obr. 1.1: Princip modelování (Zdroj: Vlastní zpracování podle [30])

Chceme získat nové znalosti o modelovaném systému, a to je cílem modelování. Systém si lze obecně představit jako množinu prvků, spolu s množinou vazeb mezi nimi navzájem i s okolím.

1.6.1 Dynamický systém

Dynamický systém je takový systém jehož výstup je závislý nejen na okamžitých hodnotách vstupů a jejich derivacích, nýbrž i na časově předcházejících hodnotách vstupů a stavů. [27]

Dynamika v systému představuje chování řízeného systému v čase. Cílem je pomocí kvalitativních a kvantitativních modelů takové systémy popsat a pochopit. Vztahy mezi veličinami mají charakter diferenciálních resp. diferenčních rovnic, algoritmů nebo odezvy na podnět mající charakter časově proměnného signálu. V dynamickém systému se tedy proměnné mění s časem. [8]

Zpětná vazba je jádrem dynamického přístupu k systémům. Proto je nutné zavést do modelu i zpětnovazební myšlení.

Proč potřebujeme dynamické systémy?

Neuvažujeme tak jednoduchou odpověď, že svět se mění rychleji a rychleji. Z krátkodobého hlediska se lidé nedokáží poučit ze svých akcí, činů, které mají dopady na budoucnost. Proto potřebujeme dynamické systémy, abychom mohli zpětně nahlížet na svá rozhodnutí a lépe volit své budoucí tahy.

1.6.2 Systémy a jejich stabilita

Obecně rozdělujeme systémy například na

- **Spojité systémy** – proměnné nabývají reálných hodnot a jsou spojité v hodnotách [8] Jako proměnou uvažujeme čas t
- **Diskrétní systémy** – proměnné nabývají hodnot z množiny celých čísel [8]
Provádí se tzv. *vzorkování*
- **Hybridní systémy** – část systému je spojitá a další část je diskrétní

Přírodou vytvořené systémy pracují se spojitým časem. Systém s diskrétním časem se velmi často promítá do technických a ekonomických systémů.

Obecně v dynamických systémech je zkoumaná jejich *stabilita*. Pro potřeby následujících kapitol analýza současného stavu a vlastní návrhy řešení se zabýváme konkrétní stabilitou, a to *asymptotickou*.

K tomu je potřebné zavést nějaké pojmy, tzv.

Charakteristická rovnice lineární diferenciální rovnice (LDR) má tvar

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad [38] \quad (1.6.1)$$

kde řešením této rovnice jsou tzv. *vlastní čísla* λ .

Pojem rovnice s konstantními koeficienty znamená, že koeficienty a_n, \dots, a_0 jsou konstantní funkce, tedy reálná čísla.

Lineární systém s konstantní maticí si lze představit jako soustavu lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty (LDR):

$$x' = Ax, A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad [2] \quad (1.6.2)$$

Charakteristická rovnice soustavy je rovnice ve tvaru

$$\det(A - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad [38] \quad (1.6.3)$$

kde $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ představuje jednotkovou matici.

Pro každé vlastní číslo λ se rovnice 1.6.3 nazývá jako charakteristická soustava a její nenulová řešení se nazývají vlastní čísla (vlastní vektory). [38]

Asymptotická stabilita lineárního systému je stabilní právě tehdy, pokud pro všechna vlastní čísla charakteristické rovnice 1.6.3 systému 1.6.2 platí

$$\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0, i = 1, 2, \dots, n \quad [8] \quad (1.6.4)$$

Demonstrační příklad (Zdroj: Vlastní zpracování)

Hledáme řešení lineárního systému

$$x' = x \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (1.6.5)$$

Uřčíme vlastní čísla a vlastní vektory matice A podle 1.6.3

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & -4 \\ 1 & -2 - \lambda \end{pmatrix} \quad (1.6.6)$$

Výpočtem determinantu získáme charakteristickou kvadratickou rovnici ve tvaru

$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0. \text{ Kořeny jsou } \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

Kořeny jsou tzv. komplexně sdružené a je vidět, že vlastní čísla soustavy LDR mají všechny reálné části záporné, splňuje tedy podmínku pro 1.6.4 a soustava LDR je asymptoticky stabilní.

V posuzování stability lineárního systému s charakteristickou rovnicí 1.6.3 lze využít následující tvrzení

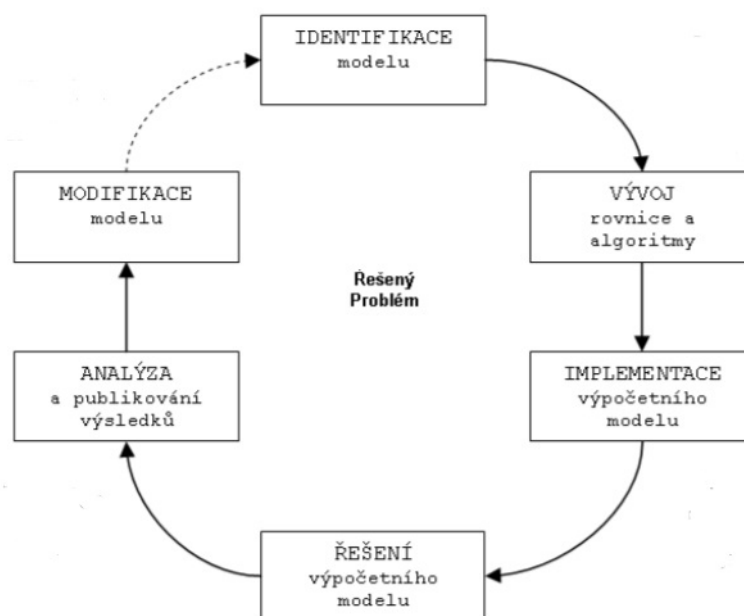
1. Je-li charakteristická rovnice druhého stupně a všechny jeho koeficienty mají stejné znaménko – systém je stabilní.
2. Jestliže všechny koeficienty charakteristické rovnice nemají stejné znaménko nebo některý chybí, systém je nestabilní.
3. Ve všech ostatních případech není možné obdobnými postupy o stabilitě rozhodnout. Pak je nutné použít některé kritérium stability (Hurwitzovo, Nyquistovo).

[18]

Tedy již z předcházejícího případu $\lambda^2 + \lambda + 2 = 0$ první podmínka je splněna a tedy systém 1.6.5 je stabilní. Pro další chápeme informační a komunikační technologie jako ICT.

1.7 Matematické modelování s využitím ICT

Následující obrázek 1.3 popisuje matematické modelování reálného problému pomocí ICT. Jedná se o opakující se zpětnovazební smyčku. [[12], s. 14]



Obr. 1.2: Matematické modelování s využitím ICT (Zdroj: [12], s. 15)

1. **Identifikace modelu** – určení jednotlivých prvků matematického modelu (pomocí knih, dokumentů, internetu) společně se sdílením problematiky s odbornou a vědeckou komunitou. Provádí se výběr modelu, jeho zjednodušení a určení všech podstatných vstupů, výstupů vazeb mezi nimi, funkcí, procesů a stavů.
2. **Vývoj** – sestavení modelu pomocí matematických rovnic včetně provedení matematické analýzy.
3. **Implementace** – výpočetního modelu pomocí prostředků ICT (užití předdefinovaných knihoven v software, programování v software, programování v programovacím jazyce a využití potřebného hardware).
4. **Řešení** modelu implementovaného s pomocí nástrojů ICT představuje naplnění modelu konkrétním daty, informacemi, parametry.
5. **Verifikace modelu a jeho modifikace** – pokud nevyhovuje jeho řešení, je právě zpětnovazební smyčka, která vede zpět ke kroku 1 a opakovat jednotlivé fáze, popřípadě provádět iterace tohoto cyklu tak dlouho, dokud není model v souladu s objektivní realitou.

[[12], s. 14-17]

1.7.1 Výběr matematických rovnic pro modelování s ICT

Abychom mohli v dalším částech analyticky řešit problematiku této práce pomocí prostředků ICT, je nezbytné uvést matematickou teorii a definice pro výpočetní část této práce.

Pro detailní zkoumání dynamiky reálných jevů je potřebné zkoumat vztahy mezi proměnnými a derivacemi funkcí, které závislost mezi nimi popisují.

Pojmem diferenciální rovnice DE (*z angl. Differential Equation*), je taková rovnice, která vedle nezávisle proměnné a neznámé funkce obsahuje i derivaci neznámé funkce. Příkladkem *obyčejná* je specifikováno, že v DE se vyskytuje derivace neznámé funkce jedné proměnné, *parciální* DE obsahují neznámé funkce více proměnných. [[27], s. 40]

Řešením DE je každá funkce, která po jejím dosazení vyhovuje DE. Řešení DE lze specifikovat na obecné (řešení obsahuje libovolnou reálnou konstantu) nebo partikulární (řešení získané z obecného volbou konkrétní konstanty – vazba na počáteční podmínky).

Obyčejná diferenciální rovnice ODE (*z angl. Ordinary Differential Equation*) je ve tvaru

$$F(t, x, dx/dt, d^2x/dt^2) = 0 \quad [[19], \text{s. 11}] \quad (1.7.1)$$

a může být přepsána jako $F(t, x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) = 0$, kde počet teček vyjadřuje stupeň derivace proměnné $x(t)$. [[19], s. 11]

Příklad 1

Rovnice $y' = 3x$, $y' + 2x = e^x$, $\sin(y') + \sin x = x$ jsou diferenciální rovnice, kde $y = f(x)$ je neznámá funkce. [[27], s. 40] Funkcionální diferenciální rovnice FE (*z angl. Functional Equation*) je rovnice zahrnující neznámou funkci pro různé hodnoty argumentů.

Příklad 2

Rovnice $x(2t) + 2x(3t) = 1$, $x(x(t)) = x(t) + 1$ jsou FE, kde t je argument funkce $x(t)$. [[19], s. 11]. Složením diferenciálních rovnic a funkcionálních rovnic vznikne funkcionální diferenciální rovnice FDE (*z angl. Functional Differential Equation*)

Příklad 3

Rovnice $\dot{x}(t) = kx(t - h)$, kde k, h jsou konstanty, $k \neq 0$, je FDE a pro $h = 0$ je tato rovnice ODE. [[19], s. 12]

1.7.2 Diferenciální rovnice s posunutým argumentem

Diferenciální rovnice s posunutým argumentem ODDEs (*z angl. Ordinary Delay Differential Equations*) jsou diferenciální rovnice ve kterých derivace neznámé funkce v aktuálním čase jsou závislé na hodnotách funkcí v dřívějších dobách. Klasifikace ODDEs je celkem složitá, protože lze je rozprostřít do různých forem. Přesto určitou klasifikaci provedl Kamenskij. [[22], s. 8]

Skalární diferenciální rovnice bude zapsána ve tvaru

$$x^{(n)}(t) = f(t, x(t), \dots, x^{(n-1)}(t), x(h_0(t)), \dots, x^{(m)}(h_m(t))), \quad [[22], \text{s. 8}] \quad (1.7.2)$$

kde h_i jsou spojité funkce definované na intervale $J \subset R$ a splňující podmínku

$$h_i(t) \leq t, h_i(t) \neq t, t \in J, i = 0, 1, \dots, m \quad [[22], \text{s. 8}] \quad (1.7.3)$$

Podle Kamenskijho lze diferenciální rovnici 1.7.2 klasifikovat jako

1. **rovnice se zpožděným argumentem**, pokud $m < n$
2. **rovnice neutrálního typu**, pokud $m = n$
3. **rovnice s předbíhajícím argumentem**, jestliže platí $m > n$

[[22], s. 8]

1.7.3 Počáteční úloha

Uvažujme o základní počáteční úlohu pro DE se zpožděním ve tvaru

$$x'(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t))), t \geq a \quad [[22], \text{s. 9}] \quad (1.7.4)$$

Zvolme bod $t_0 \in [a, \infty)$ a definujme $t_{-1} = \inf_{t \geq t_0} \{t - \tau(t)\}$

Nechť $t_{-1} > -\infty$. Množinu $E_{t_0} = [t_{-1}, t_0]$ nazveme počáteční množinou systému 1.7.4. Dále nechť je na počáteční množině E_0 definována spojitá funkce $\phi(t)$ kterou budeme nazývat jako počáteční funkce. Pak formulace problému je následující:

Je potřebné najít řešení 1.7.4 na intervalu $J = [t_0, T)$ pro $T \leq \infty$, které splňuje podmínky:

$$x(t) = \phi(t), t \in [t_{-1}, t_0], t_0 \geq a, \quad [[22], \text{s. 9}] \quad (1.7.5)$$

kde $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, f = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T, \tau(t) \geq 0, t \geq a$.

Řešení systému 1.7.4, které splňuje počáteční podmínku 1.7.5, budeme označovat jako $x(t, \Phi)$ [22] Např. $x'(t) = x(t - 1)$ s počáteční funkcí $\phi(t) = 1, -1 \leq t \leq 0$

1.7.4 Ordinary Delay Differential Equations – řešení metodou kroků

Tuto metodu pro řešení funkcionálních diferenciálních rovnic si znázorníme v následujícím příkladě, kde zvolíme přeznačení $x'(t) = \dot{x}(t)$.

Uvažujme počáteční úlohu.

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t-3) \\ \phi(t) &= 1, t \leq 0.\end{aligned}\tag{1.7.6}$$

Pro zjednodušení provedeme tři iterace. Z rovnice lze vyčíst, že její zpoždění je konstantní $\tau(t) = 3$. Tedy metodou kroků vypočteme posloupnost počátečních úloh na intervalech délky 3, tzn. na celkovém intervalu $t \in [0, 9]$.

1. krok: $t \in [0, 3] : \dot{x}(t) = \phi(t) = 1$

Obecné řešení: $x_1(t) = t + c_1$

Počáteční podmínka: $1 = 0 + c_1 \rightarrow c_1 = 1$

Partikulární řešení: $x_1(t) = t + 1$

Spočítáme počáteční podmínku pro 2. krok $\rightarrow x_1(3) = 4$

2. krok: $t \in [3, 6] : \dot{x}(t) = x_1(t) = (t-3) + 1 = t-2$

Obecné řešení: $x_2(t) = 0.5t^2 - 2t + c_2$

Počáteční podmínka: $4 = 4.5 - 2 \cdot 3 + c_2 \rightarrow c_2 = 4 - 4.5 + 6 = 5.5$

Partikulární řešení: $x_2(t) = 0.5t^2 - 2t + 5.5$

Počáteční podmínka pro 3. krok $\rightarrow x_2(6) = 0.5 \cdot 6^2 - 2 \cdot 6 + 5.5 = 11.5$

3. krok: $t \in [6, 9] : \dot{x}(t) = x_2(t) = 0.5(t-3)^2 - 2(t-3) + 5.5 = 0.5t^2 - 5t + 16$

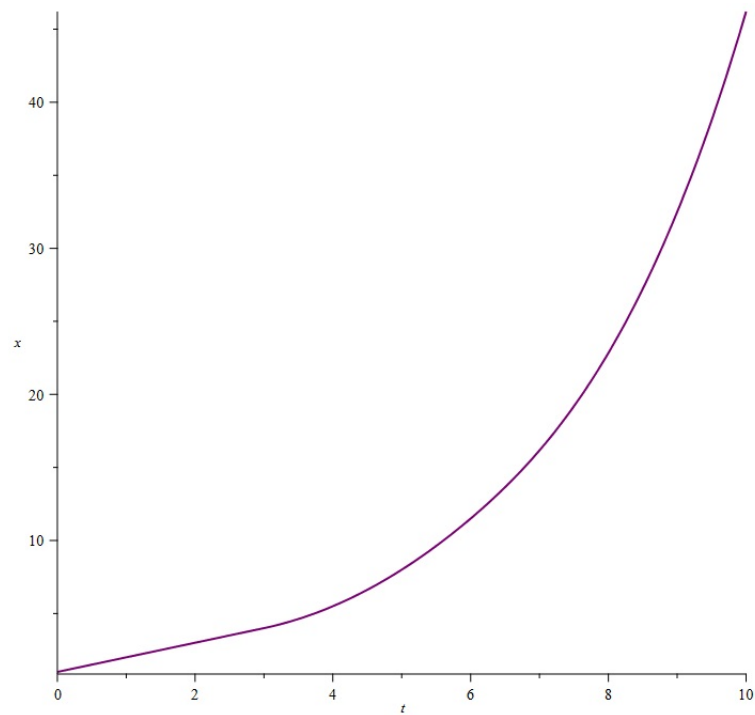
Obecné řešení: $x_3(t) = \frac{1}{6}t^3 - 2.5t^2 + 16t + c_3$

Počáteční podmínka: $11.5 = \frac{1}{6}6^3 - 2.5 \cdot 6^2 + 16 \cdot 6 + c_3 \rightarrow c_3 = -30.5$

Partikulární řešení: $x_3(t) = \frac{1}{6}t^3 - 2.5t^2 + 16t - 30.5$

Na každém tomto intervalu získáváme partikulární řešení a jejich spojením získáme následující graf. Tento graf je spojitou funkcí a řešením počáteční úlohy na intervalu $t \in [0, 9]$.

1.7.5 Ordinary Delay Differential Equations – řešení metodou kroků v systému Maple



Obr. 1.3: Metoda kroků v prostředí Maple (Zdroj: Vlastní zpracování)

2 ANALÝZA SOUČASNÉHO STAVU

V této kapitole se nejprve seznámíme s prostředím systémů Matlab, R a Maple, ve kterých promítneme výsledky některých příkladů. Dále provedeme analýzu současné situace pro oblast teorii her a její aktuální zpracování vědními obory. Pro potřeby této práce se primárně zaměříme na základní problematiku her a pak pro nutnost řešení další kapitoly půjdeme s analýzou do hloubky v oblasti nekooperativní hry a problematiky duopolu.

Současná společnost je velmi úzce spojena s potřebou sladit aktivity několika různých subjektů, které jsou od sebe často velmi odlišné. Mnoho aktivit v naší společnosti je vázáno na formální organizace a její fungování má podobu formální racionality – je efektivní, předvídatelná, kvantifikovatelná a kontrolovatelná. Skupiny i jednotlivci, kteří jsou propojeni v rámci těchto formálních vztahů, tak mohou být modelováni jako hráči určitých her.

Takových modelů existuje značné množství. Vždy se jedná o modely založené na aplikaci formálních věd. Za ty, které využívají především formální logiku, by patřily různé druhy analýz usuzování (usuzování za neúplné informace, nemonotónní usuzování, logika defaultů, epistemické logiky apod.). V dalším textu se budu soustředit na teorii her, kterou společně s počítačovou algebrou promítnu do následné kapitoly.

2.1 Počítačové algebraické systémy

Existují programy počítačové algebry R, MATLAB, Maple, Mathematica, NetLogo aj., které spadají to tzv. skupiny **CAS** (Comptuer Algebra System). Jedná se o jakýkoliv software, který je používán pro matematické formulace. Primární cíl CAS je automatizovat únavné a náročné algebraické problémy. Častokrát obsahují různé zařízení pro grafické zpracování rovnic a poskytují programovací jazyk, který si uživatel může definovat dle jeho vlastních postupů.

Přední vývojář matematického počítačového software je označen jako MathWorks, jeho hlavní produkty jsou vymezeny v následujících kapitolách.

2.1.1 Systém MATLAB (*Matrix Laboratory*)

Milióny vědců a inženýrů po celém světě využívají systém MATLAB pro analyzování a navrhování systémů a produktů, které se promítají do našeho světa. Systém MATLAB je zastoupený v automobilovém průmyslu, bezpečnostních systémech, používá se pro zdravotnická zařízení, rozvodné sítě a LTE sítě ¹, dále pro strojové učení, zpracování signálu, zpracování obrazu, počítačová cvičení, komunikace, finance, robotiku a mnoho dalších. Nejnovější produkt **R2017a** je také dostupný v různých přizpůsobeních jako MATLAB Student, Online, Mobile, Home. Jednotlivé produkty se snaží vyjít vstříc, například cenově studentům nebo možností instalace pro nízkorozpočtový hardware. [23]

Otevřená architektura systému MATLAB představuje jeden z hlavních důvodů, proč je dnes MATLAB tak rozšířen po celém světě. Otevřenou architekturou si lze představit úplný programovací jazyk. Uživatelé mohou vytvářet funkce na základě svých potřeb pro jejich aplikace. Tyto funkce přinášejí uživatelům velkou výhodu, a to že většina vestavěných funkcí v systému je přenosná mezi různými platformami, na kterých je MATLAB zaveden. Určitá přednost tohoto systému je i integrace s programovacím jazykem Java. [[6], s. 134]

Veškeré moduly systému MATLAB obsahují rozsáhlou pdf i hypertextovou online dokumentaci, díky které se uživatelé snáze orientují ve funkcích systému. Navíc více než devadesát těchto modelů je z *rodinné* společnosti MathWorks. [[6], s. 134]

¹LTE sítě navazují na 3G síť a představují rychlé datové sítě, známé pod pojmem vysokorychlostní internet. Zdroj:<<https://www.svetandroida.cz/lte-internet-201412>>

Základní přednosti systému MATLAB

- **Jazyk systému MATLAB** je úplným programovacím jazykem 4. generace (4GL), lze vyvíjet složité aplikace.
- **MATLAB Desktop** je uživatelské rozhraní základním výpočetním nástrojem systému.
- **Toolbox** jsou knihovny funkcí, které jsou využívány ve vědních, technických, finančních aj. oborech. Na základě nich lze provádět výpočty a zkoumání dat, např. pro neuronové sítě (Neural Network Toolbox), fuzzy logiku (Fuzzy Logic Toolbox) nebo analýzu rizik, analýzu úrokových měr a optimalizaci portfolií. Systém také umožňuje přístupy a transakce u relačních databází, jako je Oracle 10g, 11g, MySQL (Database Toolbox). [[6], s. 135-136]
- **Simulink** představuje nadstavbu systému MATLAB a slouží pro simulaci dynamických systémů, přičemž používá algoritmy systému MATLAB pro numerické řešení nelineárních rovnic. Uživatelé umožňuje otevírat knihovny diskretních, spojitých signálů, bloků a vytvářet grafická schémata. [[6], s. 137]

2.1.2 Systém R

Systém R je jazyk a prostředí pro potřeby statistických výpočtů a grafiky. Jedná se o projekt GNU, který byl vyvinut v Bell laboratoři Johnem Cahirsem a jeho kolegy. R nabízí širokou škálu statistických a grafických technik pro lineární a nelineární modelování, klasické statistické testy, analýzy časových řad, shlukování, aj. R je volně dostupný software v souladu s podmínkami GNU General Public Licence a lze s ním pracovat na nejrůznějších platformách UNIX, Windows a MacOS. [33]

Uživatelé by se mohlo zdát, že je R pouze statistický systém, ale jde spíše o *prostředí, ve kterém jsou implementovány statistické techniky*. [33] Systém R může být právě snadno rozšířen díky nejrůznějším balíčkům.

Samotné jádro R představuje programovací jazyk, který umožňuje větvení a vytváření smyček, jako to je u modulárního programování. Systém R obsahuje funkce pro velké množství statistických postupů

- lineární modely,
- nelineární a regresivní modely,
- analýza časových řad,
- parametrické a neparametrické testy,
- testování hypotéz, normality rozdělení

I v systému R lze šikovně vykreslovat a prezentovat data pomocí tzv. add-on balíčků. Právě toto je častá práce v systému R (vyvolávání těchto balíčků). Systém R se stal velice využívaným program pro výuku, nejen pro akademiky, ale i studenty, protože je volně dostupný a stahovatelný pod licencí GNU General Public License (GPL), verze 2.

2.2 Maple



Obr. 2.1: Maple logo (Zdroj:²)

Maplesoft, Inc. je kanadská společnost, která poskytuje matematický software Maple přes 25 let. [20] Vykreslení příkladu v předchozí kapitole (viz obr. 1.3 na str. 30) byl řešen jednak algebraickým postupem, a také dále vykreslením v prostředí Maple. Ve své práci používám verzi Maple 2016.

Maple kombinuje světově jeden z nejmocnějších matematických nástrojů s rozhraním, které velmi snadno analyzuje, prozkoumává, graficky zobrazuje a řeší oblasti matematických problémů, statistiky, fyziky, programování, ekonomické a finanční problematiky.

Systém Maple v současnosti poskytuje velmi pokročilé prostředky, metody, vestavěné knihovny a funkce. Je určený pro vývoj algoritmů, teoretických i praktických procesů s velmi dobře provedenou vizualizací a interpretací. [15]

²MAPLE Logo. *www.maplesoft.com* [online]. [cit. 6.5.2017]. Dostupné z: https://www.maplesoft.com/images2015/resources/Maple/Maple_2015_logo.jpg

Pro matematickou oblast je Maple použit především jako matematický software, zvláště pro možnost řešení úloh symbolicky [29] (viz obr.2.2)

Uživatel Maplu má možnost tvorbu článku v \LaTeX nebo HTML dokumentu v podobě webové stránky. [29]



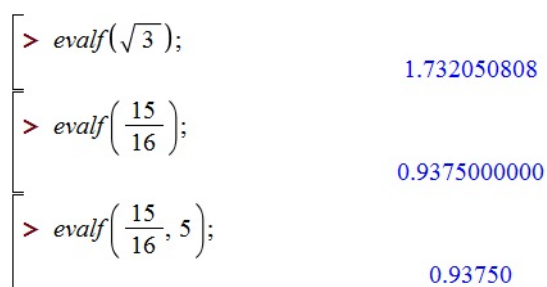
$$\left[\begin{array}{l} > \sqrt{3} \\ > \frac{15}{16} \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt{3} \\ \frac{15}{16} \end{array} \right]$$

Obr. 2.2: Symbolické vyjádření v prostředí Maple (Zdroj: Vlastní zpracování)

Pro interaktivitu ve vztahu uživatel-systém, uživatel+systém/ICT okolí je možnost i prezentace *živých* dokumentů na webu, online semináře a právě převod do programovacích jazyků jako jsou např. C, Java, Matlab, VBA aj. [[14], s. 3]

Obdržený výsledek je zapsán *přesně* symbolem. Pro vyjádření hodnoty v desetinných číslech se použije funkce **evalf**. Pro zkrácení lze použít druhý parametr jako počet desetinných míst. [[14], s. 7]



$$\left[\begin{array}{l} > \text{evalf}(\sqrt{3}); \\ > \text{evalf}\left(\frac{15}{16}\right); \\ > \text{evalf}\left(\frac{15}{16}, 5\right); \end{array} \right]$$

$$\left[\begin{array}{l} 1.732050808 \\ 0.9375000000 \\ 0.93750 \end{array} \right]$$

Obr. 2.3: Numerické vyjádření v prostředí Maple (Zdroj: Vlastní zpracování)

Produkt Maple využívá více než osm set vzdělávacích institucí (Harvard University, University of Oxford, Stanford University, ...), výzkumných laboratoří a společností ve více než devadesát zemích (např. ABB, Bosch, Siemens, Samsung, Pixar, ...). Vědecké výpočty pomocí systému Maple provádí i NATO. Díky mnoha dostupných výukových materiálů, videí a podpory ze strany produktu i pro studenty, je tento program ideálním pomocníkem při celém jejich studiu. [20]

2.2.1 Verze Maple 2016

- Obsahuje zcela nové vizualizace, nové možnosti přizpůsobení pro vykreslování jak ve 2D tak ve 3D.
- Flexibilní a intuitivní datové kontejnery organizují a analyzují heterogenní data.
- Poskytuje nástroje, které pomáhají vytvořit vláknově bezpečné (thread-safe) programy pro provádění rozsáhlých výpočtů.
- Snadno použitelné jednokrokové aplikace, které umožňují vytvoření složitějších aplikací v software Maple.
- Nové nástroje pro analýzu programů s cílem zjistit, zda jsou vhodné pro paralelní výpočty (paralelizace – možnost jak navýšit výpočetní výkon).
- Nástroje pro generování kódů, které umožní překládat procedury a postupy v Maple do mnoha jiných programovacích jazyků (aktuálně podporují generování kódu pro programovací jazyk Julia).

[20]

2.2.2 Verze software Maple

- *Professional* – Maple definuje tuto verzi jako univerzální softwarový nástroj pro matematiku, analýzy dat, vizualizaci a programování. Poskytuje kompletní, rychlé řešení vývojového prostředí pro tisíce technických organizací. Sofistikované nástroje pro vývoj aplikací a pro tvorbu efektivních algoritmů, snadno použitelné rozhraní.
- *Academic* – pro akademiky, profesory, vyučující. Tato verze pomáhá s výukou studentů. Studenti se rychleji učí. Díky vizualizacím se lépe orientují v problematice různých oblastech matematiky, mechaniky, fyziky, automatizace aj. Verze Academic také pomáhá vyučujícím udržet pozornost studenta díky rychlé vizualizaci problematiky prostřednictvím tzv. point-and-click. Pro studenty je snadná možnost experimentovat na vlastní pěst.
- *Student* – speciální verze, která klade důraz na nízkou cenu vzhledem k studentům.
- *Individuals* – verze pro jednotlivce, který používá software jen pro své osobní účely.

[20]

2.2.3 Maple a základní syntaxe

Ukázka základní syntaxe je provedena na obr. 2.4

```

> fun1 := x^2;
#zápis pro mocninu
                                     fun1 := x^2
(1)

> fun2 := x*cos(x) - x
# zápis goniometrických funkcí
                                     fun2 := x cos(x) - x
(2)

> dfun1 := diff(fun1, x);
# derivace funkce fun1 podle proměnné x
                                     dfun1 := 2 x
(3)

> dfun2 := diff(fun2, x);
# derivace funkce fun2 podle proměnné x
                                     dfun2 := cos(x) - x sin(x) - 1
(4)

> #integrál funkce fun2 podle x
int(fun2, x);
                                     cos(x) + x sin(x) - 1/2 x^2
(5)

> rov1 := 3·x + 5·y = 18 ;
rov2 := 5·x + 24·y = 102 ;
odpoved := solve({rov1, rov2}, {x, y});
#řešení dvou rovnic pomocí funkce solve
                                     rov1 := 3 x + 5 y = 18
                                     rov2 := 5 x + 24 y = 102
                                     odpoved := {x = - 78/47, y = 216/47}
(6)

```

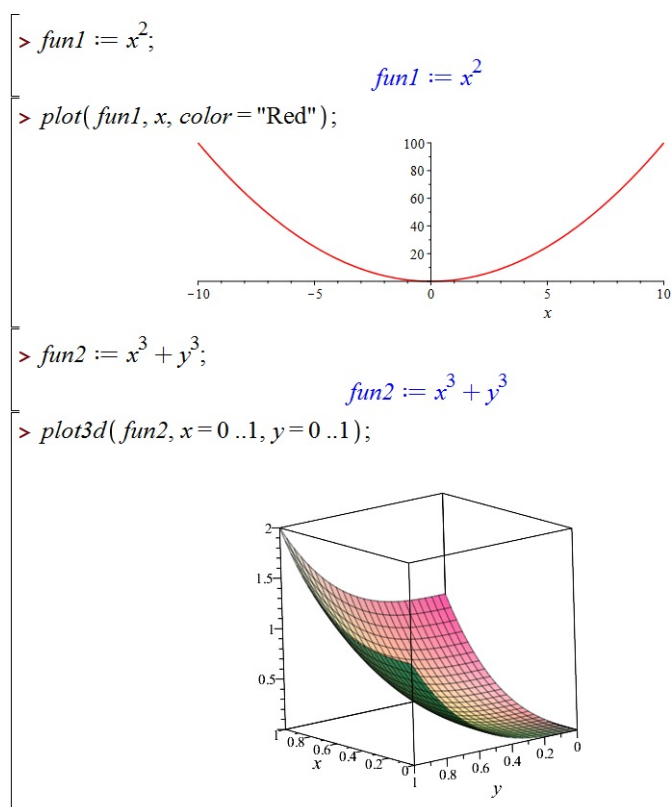
Obr. 2.4: Základní syntaxe v prostředí Maple pro derivaci, integrování a řešení rovnic (Zdroj: Vlastní zpracování)

2.2.4 Maple HELP Systém

Help (Nápověda) je dominantní součást systému Maple. Urychluje pochopení problematiky od obecné algebry, diferenciálních rovnic, financí, systémů až po grafickou tvořivost především z důvodu, že *help* nabízí všechny nápovědy k dokumentům, které jsou zabudovány v systému Maple a je možné vidět demonstrační příklady nebo již hotové programy, které jsou spustitelné přímo v okně. V *help* systému uživatel může procházet jednotlivá témata a pomáhá mu nalézt informace pro konkrétní úlohu nebo příkaz.

2.2.5 Maple a vizualizace dat

Maple díky intuitivnímu uživatelskému prostředí a funkcí, které řeší v jednom příkazu celé rovnice umožňuje vytvořit obrovské množství variací na 2D modelování a 3D plochy i s možností animace. Nástroje „point-and-click“, tedy klikni a uprav, pomáhají upravovat i grafy po vykreslení, ovládat přechodové děje, přidat nové křivky, upravovat barevné vizualizace a podporují i simulaci. Veškeré zápisy, grafy, syntaxe jsou snadno exportovatelné do pdf, \LaTeX nebo .txt souboru. [20]



Obr. 2.5: Základní syntaxe pro vykreslení funkcí v systému Maple 2016 (Zdroj: Vlastní zpracování)

2.2.6 Analýza softwarové algebry navzájem, zhodnocení

Je nutné podotknout důležitý fakt, ačkoliv porovnáváme programy počítačové algebry, navzájem jsou odlišné. Systémy Maple a Mathematica obecně řeší numerické problematiky, ale jejich skutečná realizace je cestou symboliky. Na druhou stranu za software, který je zaměřený právě spíše do numerického vyjádření, je označován MATLAB. Pokud mám zhodnotit tuto analýzu, prostředí v systému Maple se zdálo i pro úplného začátečníka intuitivní a v důsledku vlastností Maple *help* se lze velmi obratně učit s tímto software. Je vynikajícím pomocníkem ve vykreslování funkcí, prací s geometrií až po tvorbu animace objektů v čase. Je snadno dosažitelný a nabídkou bohatý. Pro mou podporu práce se Maple skvěle vypořádal s numerickými výpočty a jejich následným vykreslením. Pro vykreslení a řešení teorie her v prostředí MATLAB bych se bez vědomostí získaných během studia neobešla. A právě při práci s \LaTeX je snadné ze systému Maple pomocí příkazu *latex(expr, options)* převádět symbolické výrazy do prostředí \LaTeX . V dnešní době \LaTeX pomocí předpřipravených šablon umožňuje vytvářet profesionálně sázené bakalářské a diplomové práce studentům vysokých škol.

Porovnání Cen jednotlivých verzí systémů, uvedených na oficiálních stránkách (viz obr. 2.6). Ceny se mohou skokově lišit v některých případech – např. přírůstek Ceny kvůli připojení dalším toolboxům a balíčkům.

Cena softwaru dle nejnovější verze na globálním trhu (oficiální cena)

Software	Verze pro osobní potřeby	Verze pro studenty	Verze pro akademiky	Podporované platformy
Matlab	239 USD = 6 042.398 CZK	99 USD = 2502.918 CZK	995 USD = 25 155.90 CZK	Windows (32 & 64-bit), Macintosh, Linux (32 & 64-bit)
Maple	2 000 EUR = 54 060 CZK	69 EUR=18 650.070 CZK (nezahrnuje Toolboxy napr. Fuzzy Logic, Optimization Toolbox)	500 EUR = 13 515 CZK	Windows (32 & 64-bit), Macintosh, Linux (32 & 64-bit)
Mathematica	350 GBP =11 056.850 CZK (Desktop+upgrades+Cloud)	160 GBP = 5 054.560 CZK (Desktop+upgrades+Cloud)	1 013 GBP = 32 001.683 CZK (Desktop+Cloud)	Windows (32 & 64-bit), Macintosh, Linux (32 & 64-bit)
R	Free	Free	Free	Windows (32 & 64-bit), Macintosh, Linux (32 & 64-bit)

Obr. 2.6: Analýza cen CAS dle nejnovější verze (Zdroj: Vlastní zpracování podle informací ze [20], [23], [33], [40])

2.3 Současné výzkumy v teorii her s podporou CAS

Pro výše představované algebraické software vymezíme hry v různých odvětvích trhu. Obeznamíme se se současnou situací pro tyto trhy a pro problematiku konfliktních situací nalezneme řešení jak algebraicky, tak i v pomoci CAS.

Avšak co pojmem řešení konfliktních situací znamená?

Řešení takových situací vede k hledání tzv. rovnovážného stavu, a tu si představíme v následující kapitole.

2.3.1 Obecná rovnováha ve hře

Rovnováha je takový „okamžik“ ve kterém budou chtít hráči setrvat, tzn. nebudou chtít měnit své strategie. Rovnovážná strategie s_i hráče i je jeho nejlepší strategie za předpokladu, že ostatní hráči nezmění své strategie. [[16], s. 20]. Základní kořeny rovnováhy vedou k tzv. *Nashově rovnováze*.

2.3.2 Maximin vs. minimax strategie – sedlový bod

Takový bod, který je **maximin**[\mathbf{U}] z výplatní matice \mathbf{U} se nazývá *sedlový bod* a v normální formě hry (maticové hry) ho hledáme jako maximum ze sloupců a minimum z řádků. Hledáme *sedlový bod*, tedy dvojici strategií s_0, t_0 z množiny všech strategií S pro hráče i a množiny T pro hráče j , pro které platí

$$u(s, t_0) \leq u(s_0, t_0) \leq u(s_0, t) \quad [13], [21] \quad (2.3.1)$$

$$\min_{t_j \in T} \max_{s_i \in S} u_1(s_i, t_j) = u(s_0, t_0) = \max_{s_i \in S} \min_{t_j \in T} u_1(s_i, t_j) \quad [13] \quad (2.3.2)$$

$$\text{pro } \forall s_i \in S, \forall t_j \in T$$

$u(s_0, t_0)$ je cenou hry a tato dvojice strategií se nazývá *sedlový bod*. [13]

Pokud máme antagonistický konflikt (hra s konstantním součtem), kdy platí

$$u_1(s, t) + u_2(s, t) = \text{konstanta, pro } \forall s \in S, \forall t \in T$$

lze definici 2.3.2 vysvětlit tak, že hráči A a B mají strategie

- ▷ Hráč **A** má strategii **maximinovou** – zvolí ze svých řádků minimální hodnoty a z nich maxima. Myslí nejprve pesimisticky a zvolí nejhorší možnosti, následně z nich volí hodnoty maximální, tedy strategii pro kterou bude maximální ztráta minimální.
- ▷ Hráč **B** má strategii **minimaxovou** – dívá se na své maximální prohry a z těchto maxim (největších proher) volí minimální ztrátu.

[9]

Z definice 2.3.2 pak vyplývá, že pokud je maximinová strategie hráče A rovná minimaxové strategii hráče B, jedná se o *sedlový bod*.

V následující kapitole si definujeme Nashovu rovnováhu, která předpokládá hru dvou racionálně jednajících hráčů, kteří chtějí maximalizovat své výplaty. [10], [32]

2.3.3 Nashova rovnováha

Americký matematik John F. Nash kolem roku 1950 zavádí pojem *Nashova rovnováha*, **NE** (z angl. *Nash Equilibrium*). Označuje kombinaci takových strategií, kterou, když soupeři zvolí, se nevyplatí žádnému hráči ji měnit. Pokud by v situaci Nashovy rovnováhy, chtěl hráč změnit svou strategii, přišel by tak k horší výplatě. [16]

Strategický profil s_1, s_2, \dots, s_n je Nashova rovnováha, pokud pro každého hráče i , je s'_i *nejlepší odpovědí* na tahy s_{i-1} ostatních hráčů.

DEFINICE 2.3.1 n -tice strategií $s' = (s'_1, \dots, s'_n)$ se nazývá *rovnovážným bodem* \iff pro $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ a $\forall s_i \in S_i$ platí:

$$u_i(s'_1, \dots, s'_{i-1}, s'_i, s'_{i+1}, \dots, s'_n) \geq u_i(s'_1, \dots, s'_{i-1}, s_i, s'_{i+1}, \dots, s'_n) \quad [10]$$

Pro zjednodušení označíme množinu strategií $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ pro hráče 1 a množinu strategií $T = \{t_1, \dots, t_m\}$ pro hráče 2. Potom dvojici strategií (s', t') nazveme **Nashovou rovnováhou** právě tehdy, když pro hráče 1 platí

$$u_1(s_i, t') \leq u_1(s', t'), \text{ pro } \forall i = 1, 2, \dots, n \quad [13] \quad (2.3.3)$$

a zároveň platí z pohledu hráče 2

$$u_2(s', t_j) \leq u_2(s', t'), \text{ pro } \forall j = 1, 2, \dots, m \quad [13] \quad (2.3.4)$$

Definicí Nashovy rovnováhy lze uplatnit následující tvrzení, která budou uplatňována při realizaci jednotlivých her.

2.3.4 Tvrzení o Nashově rovnováze

1. Nashova rovnováha neexistuje v striktně dominované strategii
2. V normální formě hry $G = \{1, 2, S, T, U\}$, pokud opakovaná eliminace striktně dominovaných strategií eliminuje všechny strategie kromě strategií (s', t') , potom jsou tyto strategie Nashovou rovnováhou
3. V normální formě hry $G = \{1, 2, S, T, U\}$, pokud jsou strategie (s', t') Nashovou rovnováhou, potom se tato rovnováha ve hře udrží i po eliminaci všech striktně dominovaných strategií
4. Existuje-li jeden či více sedlových bodů ve hře, pak jsou zároveň Nashovou rovnováhou
5. V každé hře existuje alespoň jeden rovnovážný bod

[10]

Pokud neexistuje žádný rovnovážný bod v čisté strategii, jeden musí existovat ve strategii smíšené³ ⁴

2.3.5 Striktně dominované vs. dominantní strategie

Označení, že strategie je striktně **dominantní**, znamená, že jistá strategie přináší hráči lepší výplatní funkci bez ohledu na to, co ostatní hráči provedou ve hře. Taková technika řešení dává rozumný předpoklad, že racionální hráč nikdy nebude hrát striktně **dominovanou** strategii, jelikož by nedošlo k maximalizaci jeho očekávané výplaty. To porušuje racionalitu. Jednalo by se o iracionální strategii. [34]

³Smíšené strategie představují vektor pravděpodobností, s jakou hráč volí strategie ze své množiny strategií. [[16], s. 20]

⁴Ve smíšených strategiích, pro každou konečnou hru (počet strategií je definitivní) existuje alespoň jeden rovnovážný bod. [[16], s. 21]

V případě, že firma volí racionální strategii, nikdy na dominantnou hru nepřistoupí, protože, by v každém případě prohrála. Naopak striktně dominantní hru bude hrát vždy. Ve hře dvou hráčů, pokud existuje pro každého hráče dominantní strategie, bude ji každý hrát. Hra dostane jistý výsledek. Nicméně tento výsledek, lépe řečeno rovnováha, nemusí být *Paretovsky optimální*, Vilfrem Pareto definoval tuto problematiku – jedná se o situace, kdy hráči (resp. hráč) již nemohou dosáhnout lepšího stavu (výplaty), aniž by druhému bylo přioršeno.

2.3.6 Demonstrace Nashovy rovnováhy č. 1

Mějme konfliktní hru dvou fiktivních firem **A** a **B**, které vyvíjejí ERP systémy. Obě tyto firmy plánují vyvinout projekt v oblasti ERP systémů, konkrétně systém pro zdravotní pojišťovny.

Obě firmy mohou ze zobecněného pohledu vyvinout dvě varianty systému.

- ▷ Buď vysoce kvalitní systém v plné rychlosti a synchronizace při zadávání požadavků do systému, ozn. jako strategii $s_1 = HS$ a $t_1 = HS$ (High Speed), ale s tím, že testování systému zabere delší časový horizont – nedodržení plánovaného časového milníku,
- ▷ anebo vysoce kvalitní systém, který ale bude mít menší nedostatek, a to v optimalizaci rychlosti zadávání požadavků uživatelem. Tyto operace budou trvat déle, nicméně se tím zkrátí celková doba vývoje (není nutný čas navíc pro zajištění zrychlené optimalizace), ozn. tuto strategii jako $s_2 = LS$ a $t_2 = LS$ (Lower Speed).

Máme dvojmaticovou hru $G = \{A, B, S, T, U_1, U_2\}$, hráč A má množinu strategií $S = \{s_1 = HS, s_2 = LS\}$, hráč B má množinu všech strategií $T = \{t_1 = HS, t_2 = LS\}$. Volbu hladin zisků (v praxi dle expertního odhadu) do výplatní matice ukazuje tab. 2.1

		Poskytovatel B	
		HS	LS
Poskytovatel A	HS	(30, 30)	(40, 32)
	LS	(36, 50)	(20, 20)

Tab. 2.1: Matice hry pro poskytovatele ERP systému (Zdroj: Vlastní zpracování)

Jaké budou zisky poskytovatelů, při hledání Nashovy rovnováhy?

Z pohledu hráče **A**, jak nejlépe zvolí strategie pokud konkurent B volí:
 Pokud protihráč B zvolí strategii $HS \rightarrow$ pak A zvolí LS ,
 pokud protihráč B zvolí strategii $LS \rightarrow$ pak A zvolí HS
 Získáváme prvky $u_{21} = (LS, HS) = (36, 50)$ a $u_{12} = (HS, LS) = (40, 32)$

Z pohledu hráče **B**, jak nejlépe zvolí strategie, když protihráč A volí:
 Pokud protihráč A zvolí strategii $HS \rightarrow$ pak B zvolí LS ,
 pokud protihráč A zvolí strategii $LS \rightarrow$ pak B zvolí HS
 Získáváme prvky $u_{21} = (LS, HS) = (36, 50)$ a $u_{12} = (HS, LS) = (40, 32)$

Tím dostáváme z pohledu hráče A i z pohledu hráče B stejné prvky ve dvojmatici (označené hvězdičkou*), $NE_1 = u_{21} = (36, 50)^*$ a $NE_2 = u_{12} = (40, 32)^*$, jak ukazuje tab. 2.2

Tyto hodnoty zobrazují dvě Nashovy rovnováhy

		Poskytovatel B	
		HS	LS
Poskytovatel A	HS	$(30, 30)$	$(40, 32)^*$
	LS	$(36, 50)^*$	$(20, 20)$

Tab. 2.2: Matice hry pro poskytovatele ERP systému – Nashovy rovnováhy (Zdroj: Vlastní zpracování)

Je vidět, že platí fakt, pokud si hráč B zvolí strategii LS , nevyplatí se hráči A změnit svou strategii v rámci strategie hráče B – nepolepší si, za předpokladu, že B nemění strategii. Analogicky to platí pro hráče B.

Lze ověřit i dle definice pro Nashovu rovnováhu 2.3.3

$$u_1(s_i, LS) \leq u_1(HS, LS), \text{ pro } \forall i = 1, 2$$

a zároveň platí z pohledu hráče B

$$u_2(HS, t_j) \leq u_2(HS, LS), \text{ pro } \forall j = 1, 2$$

Řešení hry č. 1 (poskytovatelé ERP systému)

Matice hry má dvě Nashovy rovnováhy, a to $NE_1 = (36, 50)^*$ a $NE_2 = (40, 32)^*$, přestože ani jeden z hráčů nemá dominantní strategii.

2.3.7 Demonstrace Nashovy rovnováhy č. 2

Mějme příklad, kdy Úřad pro ochranu hospodářské soutěže (ÚOHS) v roce 2016, konkrétně na konci prosince, rozhodl o navýšení pokut za kartelové dohody mezi mobilními operátory. Čísla v matici reprezentují ztráty nebo zisky v mil. Kč, za oblibenost u zákazníků dle výhodnosti určitého tarifu. Stanovme opět předpoklad, že oba hráči uvažují racionálně, tzn. mobilní operátoři V1 a T2 na českém trhu chtějí maximalizovat své zisky. Hledejme řešení pro tuto konfliktní situaci způsobem, že hráč V1 chce maximalizovat své zisky, přičemž hráč T2 chce minimalizovat své ztráty.

Existuje hra, obsahuje dva hráče (operátoři) a každý hráč má dvě strategie, $G = \{V1, T2, S, T, U_1, U_2\}$, hráč V1 má množinu strategií $S = \{s_1 = \alpha, s_2 = \beta\}$, hráč T2 má množinu všech strategií $T = \{t_1 = \alpha, t_2 = \beta\}$. Uvedme krátký příklad, volbou hladin zisku (v praxi dle expertních odhadů) do výplatní matice viz tab. 2.3

		T2	
		α	β
V1	α	(0, 0)	(3, -1)
	β	(-1, 3)	(1, 1)

Tab. 2.3: Výplatní matice mobilních operátorů (Zdroj: Vlastní zpracování)

Z pohledu V1

- ▷ Pokud T2 hraje strategii α , V1 zvolí strategii téže α , jelikož zůstat s nulovou výplatou je lepší nežli dostat od (ÚOHS) pokutu 1 mil. Kč
- ▷ V případě, že operátor T2 táhne strategií β volí operátor V1 opět strategii α – zde je stejná úvaha, získat 3 mil. Kč je lepší nežli 1 mil. Kč

V téhle chvíli lze konstatovat, že operátor V1 má dominantní strategii α , je pro ni vždy výhodné ji volit nehledě na to, co operátor T2 udělá.

Z pohledu T2

- ▷ Pokud V1 volí strategii α , volí T2 taktéž strategii α , 0 mil. Kč $>$ -1 mil. Kč
- ▷ V případě tahu V1 strategií β , T2 opětovně volí strategii α , která je přínosnější 3 mil. Kč $>$ 1 mil. Kč

Závěrem lze říci, že operátor T2 má dominantní strategii α , která je vždy lepší možností nežli β , nehledě na to co operátor V1 udělá.

Výsledek hry č. 2 (mobilní operátoři) podle Nashovy rovnováhy

Výsledek řešení je volbou strategie α operátora V1 a volbou strategie α operátora T2 $\Rightarrow NE = u_{11} = (\alpha, \alpha) = (0, 0)$. Oba operátoři dosáhli stejného obnosu 0 mil. Kč viz tab. 2.4. *To je naprosto neefektivní.* Ano, držet se dominantní strategie nemusí vést k nejlepší variantě. Paretoovo optimum by, zde bylo $u_{22} = (\beta, \beta) = (1, 1)$. Oba operátoři by spravedlivě získali po 1 mil. Kč.

		T2	
		α	β
V1	α	(0, 0)	(3, -1)
	β	(-1, 3)	(1, 1)

Tab. 2.4: Výplatní matice mobilních operátorů – Nashova rovnováha (Zdroj: Vlastní zpracování)

Řešení hry pro maximin (minimax) strategie

Použijeme **maximin**, **minimax** strategie ze str. 41. Dle této úvahy hráč V1 myslí pesimisticky a zvolí svou nejmenší výplatu (minimum z řádků), a následně z těchto minim zvolí největší možnou výplatu, tzn. $u_1(\alpha, \alpha) = 0$. Hráč T2 zvolí dle minimaxu své největší prohry, které chce minimalizovat (vybere z nich nejvyšší výplatu), tzn. $u_2(\alpha, \alpha) = 0$.

		T2	
		α	β
V1	α	(0, 0)	(3, -1)
	β	(-1, 3)	(1, 1)

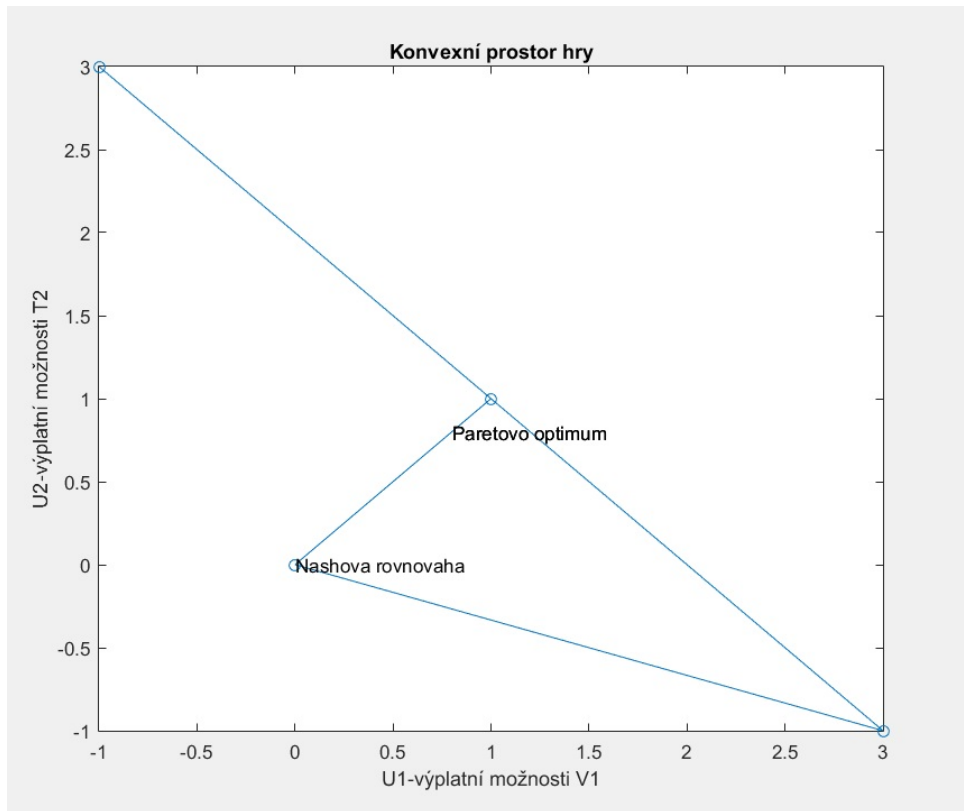
Tab. 2.5: Maximin strategie – mobilní operátoři (Zdroj: Vlastní zpracování)

Výsledek hry č. 2 (mobilní operátoři) podle maximin (minimax) strategie

Výsledky těchto strategií $u_1(\alpha, \alpha) = 0$ a $u_2(\alpha, \alpha) = 0$, se setkávají v jednom bodě výplatní matice U. Tento závěr splňuje podmínku pro 2.3.2 a bod $u_{11} = (\alpha, \alpha) = (0, 0)$ je **sedlovým bodem** hry a tedy i řešením hry.

Na příkladu jsme ukázali definici sedlového bodu, ale také i potvrdili tvrzení, Nashovy rovnováhy 2.3.4 pro 5. bod \rightarrow existuje-li jeden či více sedlových bodů ve hře, pak jsou zároveň Nashovou rovnováhou. A tím je právě bod $u_{11} = (\alpha, \alpha) = (0, 0)$, který je sedlovým bodem, a tedy i Nashovou rovnováhou.

Řešení v systému MATLAB



Obr. 2.7: Nashova rovnováha a Paretovo optimum (MATLAB) (Zdroj: Vlastní zpracování podle ⁵)

Závěr řešení v systému MATLAB

Prostor hry ohraničený strategiemi hráčů, tedy $\{s_i = -1, \dots, 3\}$ a $\{t_j = -1, \dots, 3\}$. Racionalita hráčů vedla k Nashově rovnováze, a to do bodu $(0,0)$, nicméně graf potvrzuje již řečené, že Paretovo optimum dává hráčům vyšší výplaty viz obr. 2.7.

⁵Vito (2015). *Game Theory* <<https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/51601-game-theory>>, MATLAB Central File Exchange.

2.3.8 Eliminace dominovaných strategií

Započatá hra vypadá následovně: Mějme dva trhy $T1$ (děti), $T2$ (diabetici), o které usilují dvě fiktivní navzájem si konkurující firmy α (RuzzCola), β (PepsiTruck). Uvažujeme pouze racionální chování firem, rozhodně myslí na své dobro a na svou maximalizaci výplat. Na trhu $T1$ jsou odhadovány zakázky o velikosti zisku 180 milionů Kč, na druhém trhu jsou zisky ze zakázek odhadovány na 96 milionů Kč. V každé z firem α , β je vyčleněn rozpočet na

- ▷ reklamu v „užším rozsahu“ (plakáty, nové etikety) pro dobytí obou trhů
- ▷ velkou marketingovou propagaci (reklama v televizním vysílání, celostátní soutěž o auto apod.) pro dobytí jednoho trhu

Matice výplat má následující pravidla pro jednotlivé konflikty

- ▷ V případě, že trh $T1$ (děti) nebo $T2$ (diabetici) je dobýván reklamou pouze jednou firmou, získá tato firma veškeré zakázky příslušných trhů
- ▷ Pokud firma α (RuzzCola) a firma β (PepsiTruck) volí propagaci ve stejném rozsahu (v užším nebo větším) nebo obě působí na trhy bez reklam, jsou zakázky rozděleny na polovinu pro každou firmu
- ▷ Jestliže jedna firma volí tah ve hře pro užší propagaci a druhá firma zvolí strategii velké reklamy, získá první firma $1/3$ zakázek a $2/3$ zakázek firma druhá

Hra je simultánní a nezávislá na rozhodnutí firem vzájemně.

Vzniká konfliktní situace, tedy hra $G = \{\alpha, \beta, S, T, U_\alpha, U_\beta\}$, kde hráči mají konečnou množinu strategií $S = \{s_1, s_2, s_3\}$ a $T = \{t_1, t_2, t_3\}$, jejich zisky $u_{\alpha\beta}(s_i, t_j)$ jsou definované výplatní maticí o rozměrech $(m, n) = (3, 3)$.

Označíme strategie

- ▷ VrT_1 – velká reklama na trh $T1$ (s_1 pro hráče α , t_1 pro hráče β)
- ▷ VrT_2 – velká reklama na trh $T2$ (s_2 pro hráče α , t_2 pro hráče β)
- ▷ MrT_1, T_2 – malá reklama na trh $T1$ a $T2$ (s_3 pro hráče α , t_3 pro hráče β)

Příklad zobrazení této maticové zobrazení této hry o trhy viz obr. 2.8

		PepsiTruck		
RuzzCola	(SxT)	VrT1	VrT2	Mr T1, T2
	VrT1	(138, 138)	(180, 96)	(120, 156)
	VrT2	(96, 180)	(138, 138)	(64, 212)
	Mr T1, T2	(156, 156)	(212, 64)	(138, 138)

Obr. 2.8: Matice hry – marketingová kampaň (Zdroj: Vlastní zpracování)

Firma α (RuzzCola) nemá informaci o tom jakou strategií bude táhnout firma β (PepsiTruck). Tzn., že firma neví, který sloupec bude vybrán. Ovšem Firma α (RuzzCola) může provést analýzu hry v matici. Uvědomí si, že hrát druhý řádek, tedy strategii s_2 nemá smysl, jelikož je tento řádek *dominován* oběma zbylými strategiemi $\{s_1, s_3\}$. Vždy dostane nižší zisk nehledě na to, co udělá konkurující firma.

$$u_\alpha(s_1, t_1) = 138 > 96 = u_\alpha(s_2, t_1)$$

$$u_\alpha(s_1, t_2) = 180 > 138 = u_\alpha(s_2, t_2)$$

$$u_\alpha(s_1, t_3) = 120 > 64 = u_\alpha(s_2, t_3)$$

viz obr. 2.9

		PepsiTruck		
RuzzCola	(SxT)	VrT1	VrT2	Mr T1, T2
	VrT1	(138, 138)	(180, 96)	(120, 156)
	VrT2	(96, 180)	(138, 138)	(64, 212)
	Mr T1, T2	(156, 156)	(212, 64)	(138, 138)

Obr. 2.9: První eliminace dominované strategie – marketingová kampaň (Zdroj: Vlastní zpracování)

Firma α (RuzzCola) má strategii s_2 *striktně dominovanou* jejími všemi ostatními strategiemi $(s_{-i}) = (s_1, s_3)$. Použije iterativní eliminaci a strategii s_2 eliminuje a podívá se na rozehranou hru znova.

Postupuje ekzaktně stejně jako v předchozím případě → porovná svou strategii s_3 se strategií s_1 .

		PepsiTruck		
RuzzCola	(SxT)	VrT1	VrT2	Mr T1, T2
	VrT1	(138, 138)	(180, 96)	(120, 156)
	VrT2	(96, 180)	(138, 138)	(64, 212)
	Mr T1, T2	(156, 156)	(212, 64)	(138, 138)

Obr. 2.10: Druhá eliminace dominované strategie – marketingová kampaň (Zdroj: Vlastní zpracování)

Tvorba zisků je v rámci třetího řádku (s_3) vždy větší nežli tah s_1 . Strategie s_2 je dominována strategií s_3 , proto firma α (RuzzCola) provádí další eliminaci na základě tohoto faktu viz obr. 2.10

$$u_{\alpha}(s_3, t_1) = 156 > 138 = u_{\alpha}(s_1, t_1)$$

$$u_{\alpha}(s_3, t_2) = 212 > 180 = u_{\alpha}(s_1, t_2)$$

$$u_{\alpha}(s_3, t_3) = 138 > 120 = u_{\alpha}(s_1, t_3)$$

Firmě α (RuzzCola) zbývá po eliminaci dvou strategií poslední strategie s_3 .

Firma β (PepsiTruck) má obdobný přístup. Provede analýzu hry a zjistí, že její strategie t_1, t_2 jsou striktně dominované strategií t_3 . Proto také volí tento tah, tedy poslední sloupec.

Vzniká *Nashova rovnováha* v bodě $u_{33} = (\{MrT1, T2\}, \{MrT1, T2\}) = (138, 138)$ viz obr. 2.11, tedy žádná z firem si nemůže přilepšit jiným tahem nežli strategií (s_3 pro α) a (t_3 pro β), za předpokladu, že druhý hráč nemění svou strategii. 2.3.3

		PepsiTruck		
	(SxT)	VrT1	VrT2	Mr T1, T2
RuzzCola	VrT1	(138, 138)	(106, 96)	(120, 156)
	VrT2	(96, 100)	(138, 138)	(64, 212)
	Mr T1, T2	(156, 156)	(212, 64)	(138, 138)

Obr. 2.11: Matice hry – výsledek marketingové kampaně (Zdroj: Vlastní zpracování)

2.3.9 Ověření tvrzení o Nashově rovnováze

Použijeme jednotlivá **tvrzení 1.-5.** ze str. 42, pro Nashovy rovnováhy:

1. Nashova rovnováha $u_{\alpha\beta}(s_3, t_3) = (138, 138)$ neleží v striktně dominovaných strategiích.
2. V této normální formě hry $G = \{\alpha, \beta, S, T, U_\alpha, U_\beta\}$ opakovaná eliminace striktně dominovaných strategií eliminovala všechny kromě dvojice (s_3, t_3) , tyto strategie jsou Nashovou rovnováhou.
3. V této normální formě hry $G = \{\alpha, \beta, S, T, U_\alpha, U_\beta\}$, je dvojice strategií $u_{33} = (s_3, t_3)$ Nashovou rovnováhou. Dvojice se udrží v tabulce i při eliminaci všech striktně dominovaných strategií.
4. Ve hře byl nalezen sedlový bod $u_{33} = (s_3, t_3) = (138, 138)$ a je zároveň Nashovou rovnováhou.
5. Ve hře byl jeden rovnovážný bod.

2.4 Řešení dvojmaticových her

2.4.1 Jestřáb a holub (The Hawk-Dove Game)

Jedná se o nekooperativní hru. Hráči mezi sebou předem nevyjednávají a ani si nechtějí vyjít vstříc. Tento styl hry zahrnuje většinou pojetí chování zvířat, který vychází z následujícího předpokladu. [25]

Každý hráč má opět dvě strategie $s_1 = t_1$ = agresivní strategie J (jestřáb) a $s_2 = t_2$ = pasivní strategie H (holub).

- ▷ Jestliže se setkají dva holubové je výplata V rozdělena rovným dílem
- ▷ Jestliže se setká jestřáb s holubem, jestřáb zabere celé prostředí a odnáší si celou výplatu. Tvorba nátlaku silnějšího na slabšího
- ▷ Jestliže se setkají dva jestřábi, sice má každý pravděpodobnost na výplatu rovnu $1/2 V$, ale se ztrátou c , jelikož oba se dostanou do ostrého souboje

[25]

Matice takové hry má formu viz tab. 2.6

	J	H
J	$\left(\frac{V-c}{2}, \frac{V-c}{2}\right)$	$(V, 0)$
H	$(0, V)$	$(V/2, V/2)$

Tab. 2.6: Matice hry – jestřáb a holub (Zdroj: Vlastní zpracování)

Taková forma označuje hru o zdroje. V případě, že $V > c$, pak strategie J striktně dominuje strategii H . Rovnovážný bod by byl v tomto případě (J, J) . [[25], s. 13] Přiblížíme si psychologické pohledy obou strategií.

- ▷ Strategie jestřáb J je velmi agresivní a vždy bojuje pro urvání zdroje nebo prestiže. Nechce skončit jako zbabělec holub. Vzájemné střetnutí strategií jestřáb \times jestřáb je brutální a vyrovnané - tedy každý z jestřábů má 50% pravděpodobnost na získání zdroje
- ▷ Holub naproti tomu se vyhýbá konfliktům. Pokud je před ně postaven odchází do ústraní přednostně, než by se zranil s nějakou ztrátou

Pozn.: Pokud jsou tyto psychologické profily brány v rámci *managementu*, je obtížné zaměstnávat oba extrémy. Jedná se o nátlaky zaměstnanců v oblasti zvyšování platů, pozicí vůči top *managementu*.

Uvedme příklad z prostředí České národní banky⁶. Jde o hru, kde holub představuje jednotlivce, který prosazuje nízké úroky a neohlíží se tolik na možnosti růstu inflace. Jako jestřábi uvažujme jedince, kteří bojují za vyšší úroky, avšak jinými způsoby nebo s za jiných podmínek, nebojí se porvat „do krve“ za stabilitu cen v ekonomice a hlídání inflace. Hra o trh, ve které jsou hlavními hráči bankéři ČNB, B_I a B_{II} . Jednotlivé strategie odpovídají situacím

B_I strategie $s_1 = J$ – Prosadit zvýšení úrokové sazby ještě před Novým rokem

B_{II} strategie $t_1 = J$ – Prosadit zvýšení úrokové sazby po Novém roce

B_I strategie $s_2 = H$ – Prosadit snížení úrokové sazby, a tím i další růst inflace

B_{II} strategie $t_2 = H$ – Prosadit mírné snížení úrokové sazby, a tím i mírný růst inflace

Výplata neboli, situace, kdy názor bankéře bude podpořen, označíme $V = 3$ a ztrátu označíme $c = 1$, a to při střetnutí dvou jestřábů. Platí tedy platí

$$V > c$$

Tabulka tab. 2.7 ukazuje, že platí

		B_{II}	
		J	H
B_I	J	(1, 1)	(3, 0)
	H	(0, 3)	(1.5, 1.5)

Tab. 2.7: Jestřáb a holub (příklad) (Zdroj: Vlastní zpracování)

Výsledek hry – jestřáb a holub

V popisu této hry jsme uvedli, že pokud platí $V > c \rightarrow 3 > 1$, získáváme Nashovu rovnováhu v hodnotě $u_{11} = (J, J) = (1, 1)$. Opět tedy stejným postupem, jako v předchozích příkladech \rightarrow Bankéř B_I má v tomto případě striktně dominantní strategii s_1 . Přinese mu vždy vyšší výplatou než strategie s_2 , nehledě na to, jakou strategii volí bankéř B_{II} . Analogicky postupuje Bankéř B_{II} , má striktně dominantní strategii t_1 . Vezmeme-li **2. tvrzení** z kapitoly 2.3.4 \rightarrow pokud po eliminaci všech striktně dominovaných strategií zůstane dvojice strategií $(s', t') = (1, 1)$, pak je tato dvojice Nashovou rovnováhou.

⁶ČNB ovládly holubice, bankéři jsou pro snižování úroků. Ekonomika.idnes.cz [online]: <http://ekonomika.idnes.cz/cnb-ovladly-holubice-bankeri-jsou-pro-snizovani-uroku-pp5-/ekonomika.aspx?c=A081230_201031_ekonomika_abr>

2.4.2 Vězňovo dilema (Prisoner's dilemma)

Mezi základy pro teorii her patří hra nazývaná jako *vězňovo dilema*. V základu teorie se jedná o dva vězně (podezřelý I a podezřelý II), kteří jsou zadrženi z podezření spáchání trestného činu, a zadržující například (ÚHOS) chtějí jejich doznání. Každý z podezřelých má dvě stejné strategie – může se přiznat $s_1 = t_1 =$ „Přiznat se“ nebo může mlčet $s_2 = t_2 =$ „Mlčet“.

Dle informací z ÚHOS jsou platné následující výroky: „Úřad neuloží pokutu, která by soutěžiteli jinak byla uložena, pokud soutěžitel jako první předloží Úřadu takové informace a důkazy, které mu umožní provést šetření na místě, nebo soutěžitel jako první předloží Úřadu takové informace a důkazy, které mu umožní prokázat existenci kartelové dohody.“⁷

Tzn., že zde působí vysoká psychologická páka na oba hráče v podobě trestů. Tím jsou nastaveny podmínky, aby začala „menší hra“.

Jako příklad nastavme tresty v matici, kterou prezentuje tab. 2.8

		Vězeň I	
		Přiznat se	Mlčet
Vězeň II	Přiznat se	(−5, −5)	(0, −8)
	Mlčet	(−8, 0)	(−1, −1)

Tab. 2.8: Matice trestu – vězňovo dilema (Zdroj: Vlastní zpracování)

Pokud se oba vězni doznají, obdrží trest v podobě pokuty 5 mil. Kč. Pokud zůstanou oba v tichosti, obdrží trest jako sníženou pokutu 1 mil. Kč. Nicméně pokud se vězeň I přizná a vězeň II zůstane v tichosti, Vězeň I nebude pokutován vůbec – zůstane bez sankce a jeho spolupachatel, vězeň II, dostane nejvyšší možnou pokutu 8 mil. Kč. Tzn., strategie doznání má zde velké benefity. Totéž platí v opačném případě, že vězeň I zůstane v tichosti a vězeň II se dozná.

⁷*Leniency program – pravidla a výhody nahlášení kartelu* [Online]. Brno: Úřad pro ochranu hospodářské soutěže, [cit. 2016-11-03]. Dostupné z: <<https://www.uohs.cz/cs/hospodarska-soutez/zakazane-dohody-a-zneuziti-dominance/leniency-program.html>>

Z této hry osvobození od trestu, lze vyčíst dominující strategie obou vězňů.

Vězeň I má strategii s_1 = „Přiznat se“, která dominuje strategii s_2 , zůstat v tichosti.

$$u_1(s_1, t_1) = -5 > -8 = u_1(s_2, t_1)$$

$$u_1(s_1, t_2) = 0 > -1 = u_1(s_2, t_2)$$

Ve stejné pozici se nachází i podezřelý II.

$$u_2(s_1, t_1) = -5 > -8 = u_2(s_1, t_2)$$

$$u_2(s_2, t_1) = 0 > -1 = u_2(s_2, t_2)$$

Jak uniknout z vězení?

Oba hráči nemají potuchy, jak se jejich protihráč zachová. Zda se také jeden z nich přizná, a tím dosvědčí, že druhý hráč čin spáchal a naopak. Tato hra vede k řešení, ve kterém se oba doznají, protože oba volí ve svém nejlepším zájmu.

Je vidět, že vězeň I má dominovanou strategii mlčet – kterou nebude nikdy hrát (jedná-li racionálně), tudíž volí přiznat se.

Vězeň II má stejné možnosti – jeho dominantní strategie je přiznat se (je vždy lepší než mlčet), tyto strategie se setkávají a Nashova rovnováha ukáže v buňce **NE** = $u_{11} = (s_1, t_1) = (\text{Přiznat se}, \text{Přiznat se}) = (-5, -5)$. Pokud hru řešíme způsobem strategie **maximin**, potom vězeň I vybírá min z řádků ze své výplatní matice (myslí pesimisticky), následně volí nejlepší možnou situaci – tedy maximum z těchto minim, a opět se dostane do bodu $u_1(s_1, t_1) = -5$. Analogicky pro vězně II. Se dostane do pozice $u_2(s_1, t_1) = -5$.

		Vězeň II	
		Přiznat se ↓	Mlčet
Vězeň I	Přiznat se →	(-5, -5)	(0, -8)
	Mlčet	(-8, 0)	(-1, -1)

Tab. 2.9: Matice trestu – věžňovo dilema – řešení (Zdroj: Vlastní zpracování)

Pokud by oba hráči zvolili „Mlčet“ – jedná se o kooperaci. V takovém případě by dosáhli i Paretova optima, pokud by se oba předem dohodli a mlčeli. Konkrétní příklad v reálné ekonomice je kartelová dohoda u oligopolů. Pokud by jedna strana (vězeň) usvědčila druhou a v důsledku toho, by třeba i bývalý obchodní partner měl zaplatit milionové pokuty, hra by pro reálnější případ nekončila. *Co když nastoupí pocit, že je třeba se pomstít.* Tzn. že by se hra opakovala.

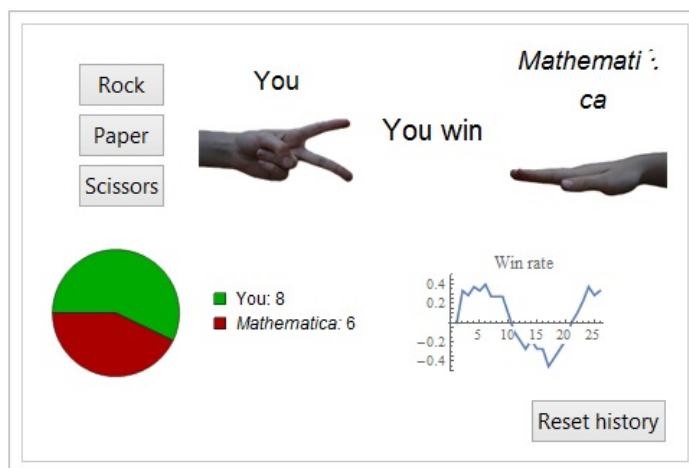
2.4.3 Kámen, nůžky, papír

Je druh nekooperativní neboli *antagonistické* hry, která značí, že výhra jednoho hráče je vždy pro druhého hráče ztrátou⁸, tj. jde o hru s nulovým součtem $u_1(s_i, t_j) + u_2(s_i, t_j) = 0$, pro $\forall s_i \in S, t_j \in T$ Tzn., že nastává tato situace viz tab. 2.10

		Hráč II		
		Kámen	Nůžky	Papír
Hráč I	Kámen	(0, 0)	(1, -1)	(-1, 1)
	Nůžky	(0, 1)	(0, 0)	(1, -1)
	Papír	(1, -1)	(1, -1)	(0, 0)

Tab. 2.10: Matice hry – kámen, nůžky, papír (Zdroj: Vlastní zpracování)

Co když si zahrajeme více kol? Hráč I i hráč II mají informace o předchozích tazích a na základě toho, mohou svou hru přizpůsobit v dalším tahu. Nastává situace, kdy ve hře neexistuje rovnováha, která by vznikla volbami čistých strategií. Hráči by mohli do nekonečna hrát dle své taktiky, proto je vhodné i do těchto deterministic- kých her zavést určitou míru náhody, která vede na teorii pravděpodobnosti. [32] Je vhodné tedy použít i volně dostupné simulace viz obr. 2.12



Obr. 2.12: Wolfram Demonstration Program pro hru kámen, nůžky, papír (Zdroj:⁹)

⁸Pokud hráč vyhraje, obdrží od druhého hráče výplatu 1 (např. jeden bonbón), pokud prohraje, vznikne mu ztráta -1. Při remíze obdrží hráči výplatu 0.

⁹**Model:** *Rock, Paper, Scissors with AI Player*. Wolfram Demonstrations Project. John McLoone. Northwestern University, Evanston, IL, 2013. Dostupné z: <http://demonstrations.wolfram.com/RockPaperScissorsWithAIPlayer/>

2.5 Hry s opakováním

2.5.1 Opakované věžňovo dilemma – Axelrodův turnaj

Vezměme základní hru věžňova dilemma, kdy se konflikt opakuje a každý z hráčů má možnost se *pomstít* (zradit). V roce 1981 Robert Axelrod vytvořil turnaj v opakované hře Věžňovo dilemma. Turnaje se zúčastnili teoretici z několika vědních oborů, kteří zaslali definice svých strategií. [1]

Demonstrace několika strategií

1. vždy kooperovat V-K
2. vždy zradit V-Z
3. oko za oko TFT (*z angl. Tit For Tat*) pokud první hráč zradil, druhý téže zradí. Pokud naopak první hráč kooperuje druhý tuto strategii téže oplácí.
4. Opakovaně ZZP: stejné schéma zradit, zradit, přiznat se.
5. Náhodně s pravděpodobností 0.5 volí strategii zradit nebo přiznat se.

[[16], s. 34]

Celkem možných strategií v turnaji bylo 15, počet opakovaných kol 200. Strategie, která turnaj vyhrála, nesla název TFT (oko za oko) zaslaná od matematického psychologa Antola Rapoportem. [1] Axelrodův turnaj chápeme jako pokus o neanalytické řešení hry. [16]

V klasické teorii her bývá dán předpoklad, že hráči hrají pouze jedno kolo, a to za dokonalé informace a přesnou kvantifikací užitku. V reálném životě, takový předpoklad není příliš častý. Hry se nejen opakují a hráči hrají více kol, ale navíc zde přichází určitá pravděpodobnost, náhoda a tím pouze odhady o velikosti užitku. Pro takové iterované hry byl vymezen pojem „*evoluční hry*.“

Lze v teorii her objevit a udržet spolupráci? Ano, pokud princip hry věžňovo dilemma je opakováno v konečném nebo nekonečném počtu opakování. Základní myšlenkou takového opakování je, že hráč může být potrestán, pokud se přizná (podvede protihráče) ostatním hráčům. Tito na zradu zareagují v jednom nebo i v dalších kolech. Pokud je trest znám dopředu a je dostatečně nákladný, pro hráče je racionální spolupracovat v opakované hře. [16]

Turnaj je postaven na tzv. *vývoji spolupráce* (v angl. *Evolution of Cooperation*).

V roce 1981 Axelrod spolu s Hamiltonem měli hlavním zájmem najít vítěznou strategii pro opakovanou hru věznova dilema. Strategie, která tento turnaj vyhrála, byla *Tit For Tat* neboli oko za oko. Nicméně, jak je patrné tato strategie má nevýhody. Jestliže se v souboji střetne první hráč se zrádcem, a tedy první hráč na začátku hned kooperuje a protihráč zradí již má 5 bodů celkově navíc. Avšak kdyby oba spolu kooperovali dosáhli by celkových bodů 6 – to je hlavní idea, myšlenka a podstata „evolution of cooperation“. [1]

Definice věznova dilematu vytváří vztahy na základě různých výsledků.

- ▷ První vztah vyjadřuje pořadí výplatní matice. To nejlepší, co hráč může obdržet je P – pokušení zradit, když ostatní hráči kooperují
- ▷ To nejhorší, co hráč může dostat je H – Hlupáková výplata, za naivní spolupráci mezitím, co druhý hráč zradí
- ▷ Pro ostatní dva výsledky je O – Odměna pro společnou spolupráci, je hodnocena více než T – trest, za zradu navzájem

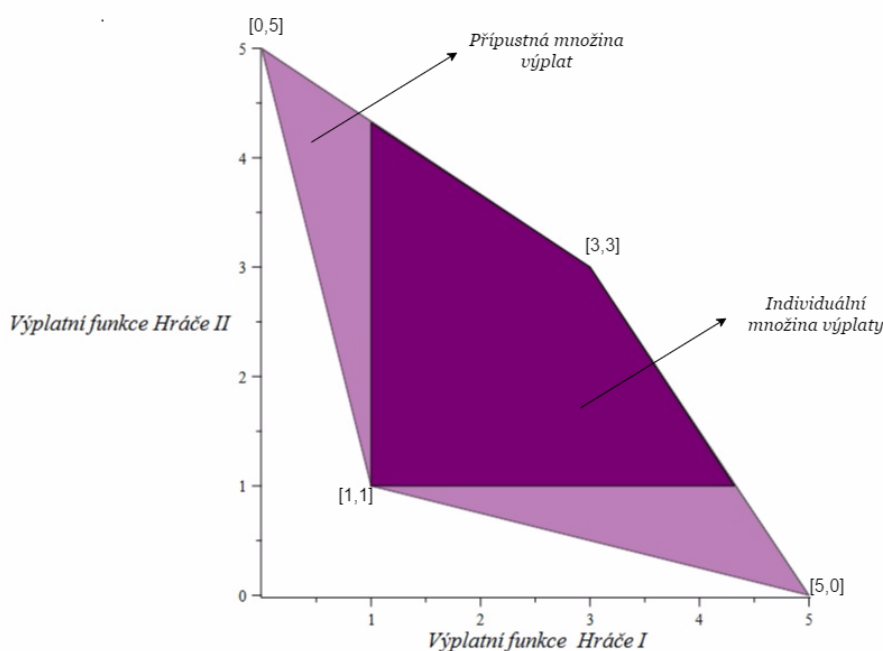
[1]

Hráči se nedostanou z jejich dilematu, tím, že by se využívali navzájem. Takový předpoklad znamená, že vykořisťováním nebo zneužíváním druhého hráče nepřináší takovou výplatu jako při vzájemné spolupráci. Tudíž se předpokládá, že odměna pro vzájemnou spolupráci (jejich průměr) O je větší než průměr pokušení P spolu s hlupákovou odměnou H . Výplatní matice má hodnoty ve formě skóre (obdobně je i výplatní matice, kde hodnoty představují počet let ve vězení za volbu jednotlivých strategií).

		Hráč II	
		Kooperace	Zradit
Hráč I	Kooperace	$(O = 3, O = 3)$	$(H = 0, P = 5)$
	Zradit	$(P = 5, H = 0)$	$(T = 1, T = 1)$

Tab. 2.11: Výplatní funkce hráče I a hráče II (Zdroj: Vlastní zpracování)

Následující graf viz obr. 2.13 ukazuje množinu všech možných a individuálních výplatních funkcí.



Obr. 2.13: Kooperativní výplata – světlá oblast a individuální výplata – tmavá oblast (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)

Všechny výplaty nad bodem (1,1) lze brát jako výplaty Nashovy rovnováhy tzn. Nashovy rovnováhy jsou $\geq (1, 1)$. Obecně se předpokládá, že všichni hráči vyhodnocují výplatu vzhledem k hře stejně. Výsledný výplatní vektor v opakované hře je konvexní kombinace výplat v jednotlivých periodách. Výplata při kooperaci v opakované hře se nazývá *množina možných přínosů* označme jako F . Je konvexní, uzavřená a omezená množina. Dle výplatní matice je F konvexní množina ohraničená body výplatní matice (1, 1), (0, 5), (3, 3), (5, 0) [5] Pokud by ve hře hráli dva hráči s psychologickým profilem sobce, oba dva volí svou striktně dominantní strategii, tedy zradu. Přitom ve skutečnosti výplata je menší, než kdyby vzájemně spolupracovali.[1]

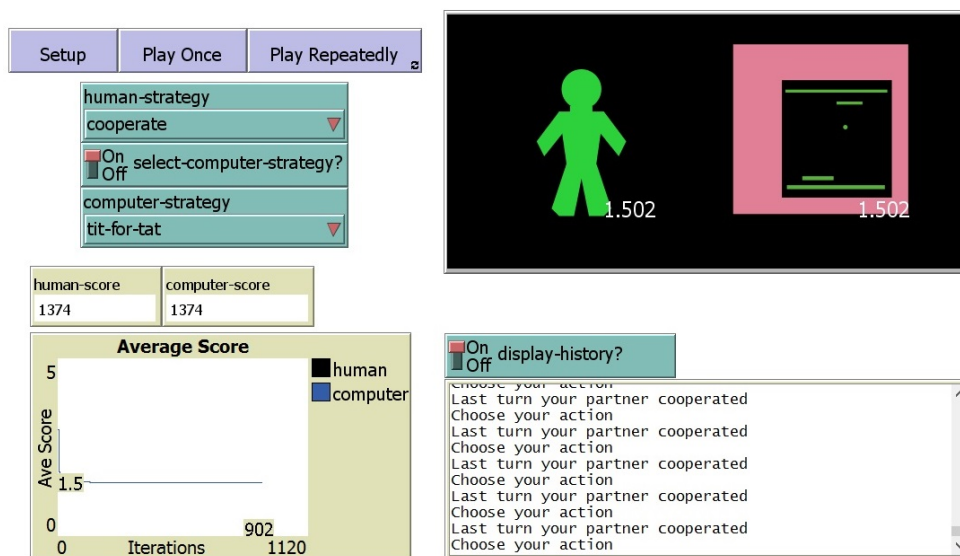
Jestliže je hra hrána v konečném počtu kol, hráči nemají žádnou motivaci spolupracovat v posledním kole, jelikož už není co v budoucnosti ovlivnit, totéž platí pro předposlední tah, kdy hráči předpokládají zradu v posledním tahu, tudíž zradí i v tomto předposledním kole. Taková úvaha znamená, že hra může být rozluštěna až k vzájemné zradě v prvním kole v jakémkoliv pořadí her, které mají konečnou délku.

2.5.2 Simluace Axelrodova turnaje

K této simulaci jsem využila Netlogo. Je v kruhu tzv. multi-agent programovatelné modelovací prostředí. Open-free software je využíván hojně studenty, učiteli a výzkumnými pracovníky po celém světě. Jeho autorem je Uri Wilensky. Netlogo má v sobě implementované tzv. *ukázkové modely* v Model Library. V této knihovně lze si prakticky odzkoušet nejrůznější problematiky matematiky, ekonomie, fyziky apod. Pro své účely jsem využila v *ukázkových modelech* balíčků v sekci Social Science balíček *Prisoner's dilemma* konkrétně Iterovanou hru věžňova dilema pro dva hráče.¹⁰

Postup:

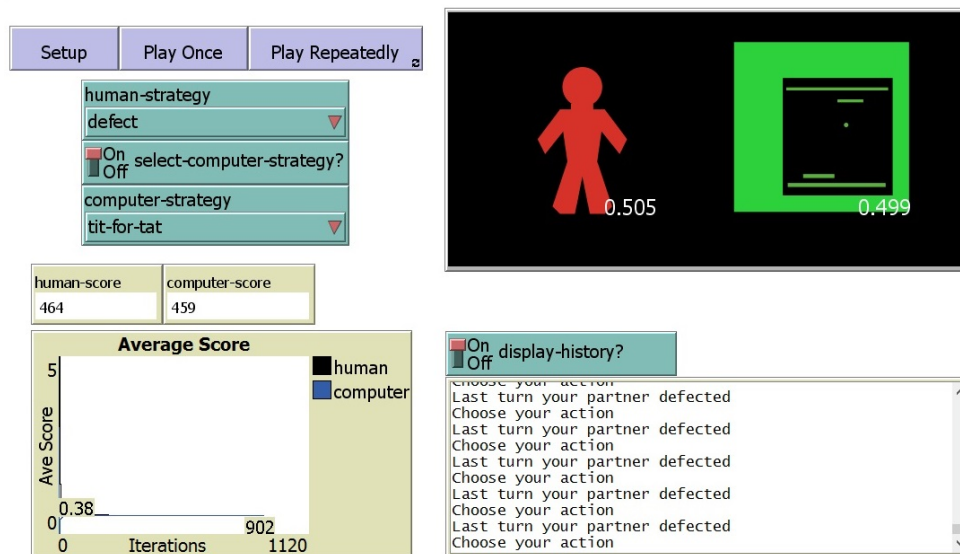
Na začátku modelování zvolíme naši strategii – *human-strategy* a strategii počítače *computer-strategy*. Můžeme rozhodnout, zda hra se bude hrát jednou anebo opakovaně. Zvolila jsem počet iterací 1120 (kol) a porovnávala průměrnou kooperaci napříč těmito strategiemi: *Kooperovat* – za každých podmínek spolupracuj, *Zrazovat* – za každých podmínek zraď, *Neodpouštět* – hráč kooperuje do té doby než ho protihráč zradí, pak už nikdy nekooperuje. *TFT* – oko za oko, *Náhodně* – s jistou pravděpodobností volí agent různé strategie během každého kola. Na obr.2.14 je *Kooperuj* vs. *TFT*



Obr. 2.14: Model 1: Věžňovo dilema (NetLogo) – Kooperace vs. TFT (Zdroj: Vlastní zpracování)

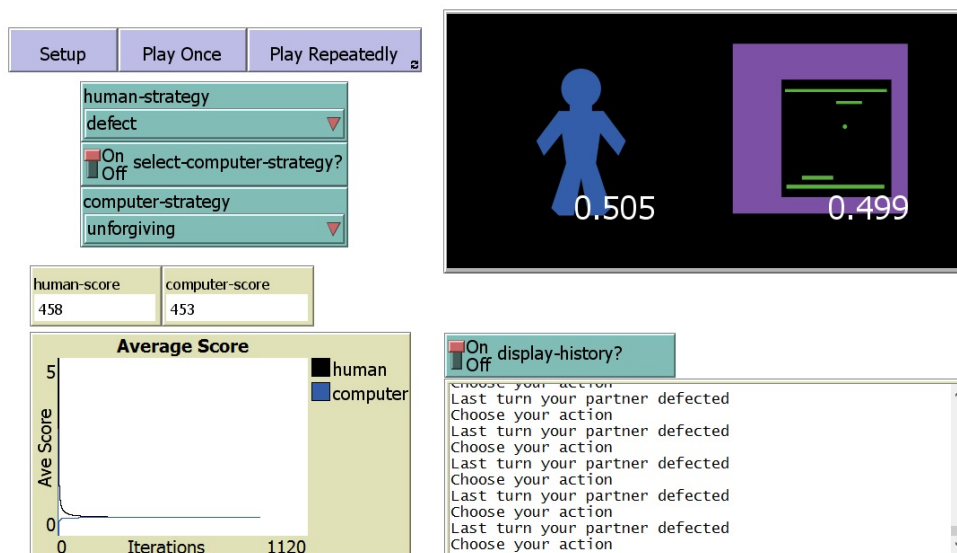
¹⁰**Model:** Wilensky, U. (2002). NetLogo PD Two Person Iterated model. <http://ccl.northwestern.edu/netlogo/models/PDTwoPersonIterated>. Center for Connected Learning and Computer-Based Modeling, Northwestern University, Evanston, IL. **Netlogo Software**

Na obr. 2.15 je střet strategií *Zrazovat* vs. *TFT*



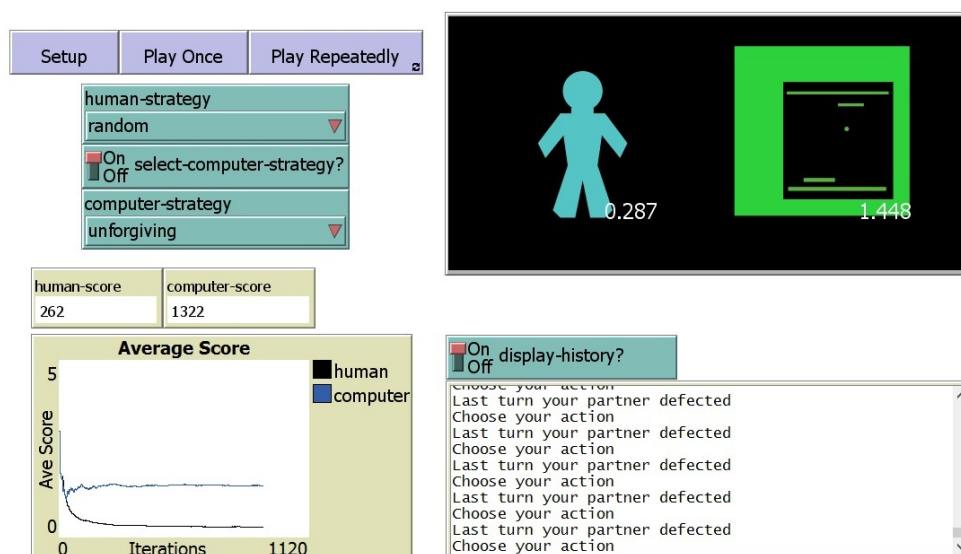
Obr. 2.15: Model 2: Vězňovo dilemma (NetLogo) – Zrazovat vs. TFT (Zdroj: Vlastní zpracování)

Na obr. 2.16 je střet strategií *Zrazovat* vs. *Neodpouštět*



Obr. 2.16: Model 3: Vězňovo dilemma (NetLogo) – Zrazovat vs. Neodpouštět (Zdroj: Vlastní zpracování)

Na obr. 2.17 je střet strategií *Náhodně* vs. *Neodpouštět*



Obr. 2.17: Model 4: Vězňovo dilema (NetLogo) – Náhodné tahy vs. Neodpouštět (Zdroj: Vlastní zpracování)

Proměnné	Model 1	Model 2	Model 3	Model 3
Human-strategy	<i>Kooperovat</i>	<i>Zrazovat</i>	<i>Zrazovat</i>	<i>Náhodně</i>
Computer-strategy	<i>TFT</i>	<i>TFT</i>	<i>Neodpouštět</i>	<i>Neodpouštět</i>
Human – skóre	1374	464	458	262
Computer – skóre	1374	459	453	1322
Celkové skóre kooperace	2748	923	911	1584
Průměrné skóre avg-human	1.502	0.505	0.505	0.287

Tab. 2.12: Výsledky turnajů – iterované věžňovo dilema (1120 kol) (Zdroj: Vlastní zpracování)

Výsledky:

Pokud se zaměříme na celkové skóre – je nejúspěšnější dvojice *hodných* strategií {Kooperovat × TFT}. Kooperace a TFT dosáhnou společně nejvyššího skóre nežli dvojice zlých strategií {Zrazovat × Neodpouštět}. V historii tahů, lze procházet jednotlivá kola a podívat se na tahy hráčů. Je potvrzena úvaha, že společná kooperace vede k vyšším užitkům.

3 VLASTNÍ NÁVRHY ŘEŠENÍ

V této kapitole chci vyřešit konflikt dvou konkurentů a zjistit, jak se chová rovnováha dvou firem, které mají tržní strukturu oligopolu. Využiji zde získané znalosti ze softwarové algebry a provedu výpočet pro získání matematických zápisů, které nám umožní získat informace o chování, predikci dynamického tzv. Cournotova modelu (viz kapitola 3.1). Nejdříve prozkoumám rovnováhu pro Cournotův model bez zpoždění a následně díky ODDEs se dostaneme do reálnějšího děje chování dvou firem, pro které platí jisté předpoklady. Reálnějším dějem budeme rozumět, že se vyskytne/ vyskytnou

- ▷ jedno časové zpoždění, způsobeno opožděnou realizací výstupu u jedné firmy
- ▷ dvě časové zpoždění, způsobené opožděnou realizací výstupu u každé z firem

Univerzální řešení tohoto typu lze využít právě pro potřeby firem, které vědí, že mají na trhu stejně silného protihráče. Ve většině případů jsme měli možnost vyřešit konflikt způsobem, že hra je u konce a Nashova rovnováha obsadila určitý bod, např. ve hře s mobilními operátory (viz kapitola 2.3.7), s celkový ziskem pro obě společnosti ve výši $u_1(s_1, t_1) + u_2(s_1, t_1) = 0$ mil. Kč.

Avšak, proč by se společnosti měly spokojit s takovým ziskem, když mohou získat obnos větší? V řešení půjdeme mnohem hlouběji, kdy firma se snaží odhadnout strategii svého protihráče a najít bod rovnováhy.

3.1 Cournotův model

Nejstarší model promítající nekooperativní hru je tzv. **Cournotův model**. Dle Augustina A. Cournota zobrazení hry dvou hráčů lze prezentovat takto. Pro tento model je charakteristická situace, že firma i rozhoduje o vlastním množství produkce q_i tak, že vychází z množství produkce konkurence j , který považuje za **fixní** tzn. $\frac{\Delta q_2}{\Delta q_1} = 0$. Pro grafické znázornění se uvažuje, že mezní náklady MC (*z angl. Marginal Cost*) jsou konstantní. [11] Tento model vůbec poprvé zobrazil podstatu Nashovy rovnováhy.

Předpoklady pro tento základní model jsou

- ▷ Na trhu budou dvě firmy
- ▷ Na trh dodávají homogenní produkt
- ▷ Firmy nespolupracují - tzn. neexistuje tajná dohoda
- ▷ Výstup neboli dodávka množství ovlivňuje cenu zboží
- ▷ Firmy volí svá množství simultánně

[[10], s. 15] [17]

V případě lineárního Cournotova modelu je tržní cena určena celkovou nabídkou (součet individuálního nabízeného množství) ve tvaru

$$Q = q_1 + q_2 \quad [10]$$

a funkcí poptávky

$$P = f(Q) = a - bQ = a - b(q_1 + q_2) \quad [10] \quad (3.1.1)$$

Neboli obecná rovnice poptávky, kde pro koeficienty platí $a \geq 0 \wedge b \geq 0$

Výrobní náklady TC (*z angl. Total Cost*) pro firmu $i \in \{1, 2\}$ s množstvím produkce q_i jsou lineárního tvaru:

$$TC_i = TC(q_i) = c_i q_i, i \in \{1, 2\} \quad [26] \quad (3.1.2)$$

To znamená, že jsou fixní náklady nulové. [10] Uvažujeme, že s růstem produkce roste cena, a tudíž bude pro konstanty nákladů platit $c_1 \geq 0 \wedge c_2 \geq 0$.

Mezní náklady MC (*z angl. Marginal Cost*) firem jsou určeny jako derivace celkových nákladů podle množství Q

$$MC_i = MC(q_i) = \frac{dTC}{dq_i}, i \in \{1, 2\} \quad [26] \quad (3.1.3)$$

Celkový příjem firmy i , TR (*z angl. Total Revenue*) je vyjádřen součinem množství q_i a tržní ceny p za jednotku:

$$TR_i = TR(q_i) = P \cdot q_i, i \in \{1, 2\} \quad [26] \quad (3.1.4)$$

Zisková funkce z produkce firmy i je definována jako rozdíl celkových příjmů $TR(q_i)$ a celkových nákladů $TC(q_i)$

$$\pi_i = TR_i - TC_i = (a - b(q_1 + q_2))q_i - c_i q_i, i \in \{1, 2\} \quad (3.1.5)$$

$$(3.1.6)$$

Standardně se bere do úvah jedna hra o dvou hráčích, z nichž každý má strategie o volbě množství rovnu intervalu celých reálných čísel $q_i = [0, \infty)$. Dalo by se tvrdit, že extrémně velká množství nejsou přípustná, a proto by neměla být součástí strategického prostoru firmy. Obecně vzato je $P(Q) = 0$ pro $Q \geq a$ [10] – žádná racionálně jednající firma i nechce produkovat množství $q_i > a$.

Předpokládáme, že ve chvíli, kdy firmy si jednou vyberou svou optimální úroveň množství (dodávek na trh), tržní cena je stanovena a firmy obdrží odpovídající úroveň zisku.

R_i vyjadřuje reakční křivku firmy i . Pro každou strategii (strategie představují zvolená množství) soupeře označme jako q_j , hledá firma i takové množství $q_i = R(q_j)$, aby hodnota $\pi_i(q_i, q_j)$ byla maximální.

Kdy budou oba hráči dosahovat maximalizace zisku?

Obecně nabývá-li zisk v nějakém bodě Q_0 maxima, pak platí $MR(Q_0) = MC(Q_0)$. [[26], s. 74]

Dále uvažujme, že $i = 1$ a $j = 2$. V našem případě použijeme pro mezní veličiny parciální derivace funkce zisku, jedná se o problematiku hledání extrému – maximalizace zisku, který se nachází v bodě (q_1^*, q_2^*) , tedy hledání extrému funkce více proměnných.

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow a - 2bq_1 - bq_2 - c_1 = 0$$

$$q_1 = \frac{a - q_2 - bq_2}{2b}$$

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_2} = 0 \Rightarrow a - 2bq_2 - bq_1 - c_2 = 0$$

$$q_2 = \frac{a - c_2 - bq_1}{2b}$$

Reakční křivky firmy 1 a firmy 2 na množství (strategie) soupeře vyjádříme takto

$$R_1(q_2) = q_1 = \frac{a - c_1 - bq_2}{2b} \quad (3.1.7)$$

$$R_2(q_1) = q_2 = \frac{a - c_2 - bq_1}{2b} \quad (3.1.8)$$

Rovnovážný bod je získán jako průsečík reakčních křivek (průsečík nejlepších odpovědí hráčů). Tzn. hodnotu neznámou q_1 rovnice 3.1.7 dosadíme do rovnice $R_2(q_1) = q_2$, tím získáme rovnici o jedné neznámé q_2 a její výsledek označíme jako q_2^* . Po jejím dosazení zpětně do rovnice 3.1.7, získáme i hodnotu q_1 , kterou opět označíme jako q_1^* . Tyto vyjádřené hodnoty (q_1^*, q_2^*) představují Nashovu rovnováhu **NE** v Cournotově modelu – Cournotova rovnováha E^* .

Ekvilibrum Cournotova modelu $E^* = \mathbf{NE} = (q_1^*, q_2^*)$, tak že $R_1(q_2^*) = R_2(q_1^*)$.

$$E^* = \left(\frac{a - 2c_x + c_y}{3b}, \frac{a - 2c_y + c_x}{3b} \right) \quad (3.1.9)$$

Cournotova rovnováha znázorňuje bod ve kterém každá firma odhadla výstup svého konkurenta. Tato podstata vede k závěru, že nabídka a poptávka po určitém produktu jsou v rovnováze a žádná z firem si změnou množství nemůže přilepšit za předpokladu, že konkurent své množství nemění. Citlivost této situace bude hlouběji zkoumaná dále.

3.2 Statický Cournotův model

Cílem této kapitoly je nalezení rovnovážného stavu duopolu, tedy dvou firem na nedokonalém trhu.

Hra o trh může začít.

Na českém trhu figurují dva dominantní hráči – dvě fiktivní firmy K1 a CS2. Mějme definovanou hru pro duopol,

$$G = \{K1, CS2, q_1, q_2, \pi_1, \pi_2\}$$

- ▷ Dva hráči $i = 1 = K1, j = 2 = CS2$
- ▷ Strategie $q_1 = [0, \infty) \quad q_2 = [0, \infty)$
- ▷ Hráči hrají simultánně – jednorázově volí svůj výstup, současně
- ▷ Hráči jednají racionálně – *chci maximální uspokojení* (maximalizace zisku)
- ▷ Hráči uvažují – *výstup mého protihráče ovlivní můj zisk* – dopad na tržní cenu
- ▷ Výplatní funkce pro i –tého hráče je π_i

Tyto dvě firmy v duopolní hře, nabízející nediferencovaný produkt a čelí následující poptávce se sklonem $b = 1$

$$P = 120 - (q_1 + q_2)$$

V příkladu zvolme následující údaje, za předpokladu, že náklady obou firem jsou ve stejné výši.

Firma K1

- ▷ Celkové náklady $TC_1 = c_1 q_1, c_1 = 1$
- ▷ Tržní poptávka je ve tvaru $P = 120 - (q_1 + q_2)$
- ▷ Zisk $\pi_1 = P \cdot q_1 - TC_1 = [120 - (q_1 + q_2)] \cdot q_1 - q_1$
- ▷ Maximalizace zisku pro firmu K1, pro hledaný extrém (bod Cournotovy rovnováhy), položíme derivaci zisku podle q_1 rovno nule

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial q_1} = 0$$

$$119 - 2q_1 - q_2 = 0$$

$$q_1 = R_1(q_2) = \frac{119 - q_2}{2}$$

Firma CS2

- ▷ Celkové náklady $TC_2 = c_2 q_2$, $c_2 = 1$
- ▷ Tržní poptávka je ve tvaru $P = 120 - (q_1 + q_2)$
- ▷ Zisk $\pi_2 = P \cdot q_2 - TC_2 = [120 - (q_1 + q_2)] \cdot q_2 - q_2$
- ▷ Maximalizace zisku pro firmu CS2, pro hledaný extrém (bod Cournotovy rovnováhy) :
$$\frac{\partial \pi_2}{\partial q_2} = 0$$

$$119 - 2q_2q_1 = 0$$

$$q_2 = R_2(q_1) = \frac{119 - q_1}{2}$$

Výsledky této sekce definují reakční křivky obou firem (R_1, R_2). Reakční křivka firmy K1 $\implies q_1 = R_1(q_2)$ definuje výstup jakožto funkci výstupu firmy CS2 v tržní struktuře duopolu. Analogicky pro firmu CS2 reakční křivka na množství konkurenta q_1 je ve tvaru $\implies q_2 = R(q_1)$.

Pro konkrétní představu, pokud firma K1 pro homogenní produkt M zvolí strategii v podobě množství $q_1 = 50$, reakce firmy CS2 na takové množství bude

$$q_2 = R_2(50) = \frac{119 - 50}{2} = \frac{69}{2} = 34.5$$

zisky pro K1 a CS2 jsou následující

$$\pi_1 = [120 - (50 + 34.5)] \cdot 50 - 50 = 1725$$

$$\pi_2 = [120 - (50 + 34.5)] \cdot 34.5 - 34.5 = 1190.25$$

Zisk CS2 je nižší z důvodu, že rozhodnutí obou firem, nepředstavuje rovnováhu duopolu.

Špatný odhad konkurenta

Proto se nyní obeznámíme s rovnováhou v Cournotově modelu.

3.2.1 Cournotova rovnováha

Udává strategii ve hře o trh, která stanovuje množství výstupu hráče na základě množství výstupu protihráče tak, že nabídka a poptávka určitého sortimentu jsou v rovnováze. Pro každou strategii firmy CS2, která produkuje množství q_2 , hledá firma K1 takové množství $q_1 = R(q_2)$, aby hodnota zisku $\pi_1(q_1, q_2)$ byla maximální. V Cournotově modelu je rovnováha dosažena maximalizací obou firem. Dosazením q_2 do reakční křivky R_1 firmy K1 je dosaženo bodu Cournotovy rovnováhy v bodě (q_1^*, q_2^*) .

$$\begin{aligned}q_1 &= \frac{119 - q_2}{2} \\q_1^* &= \frac{119}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{119}{2} - \frac{q_1^*}{2} \right) \\q_1^* - \frac{1}{4}q_1^* &= \frac{2 \cdot 119 - 119}{4} \\\frac{3}{4}q_1^* &= \frac{119}{4} \\q_1^* &= \frac{119}{3}\end{aligned}$$

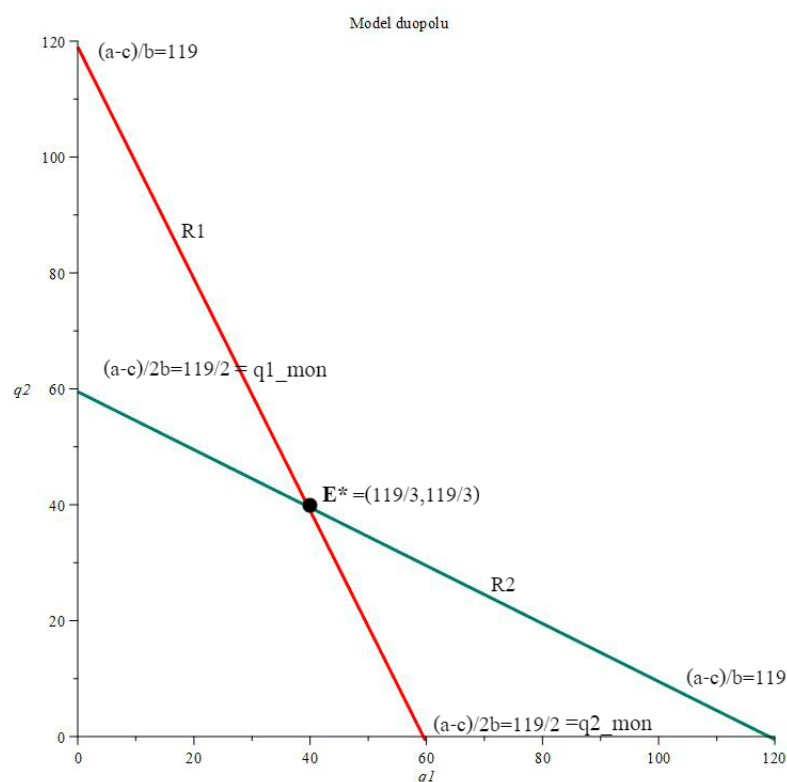
Analogickým postupem získáme hodnotu optimálního množství firmy CS2 q_2^* :

$$q_2^* = \frac{119}{3}$$

Bod rovnováhy

$$E^* = (q_1^*, q_2^*) = \left(\frac{119}{3}, \frac{119}{3} \right)$$

Situaci znázorňuje obr. 3.1

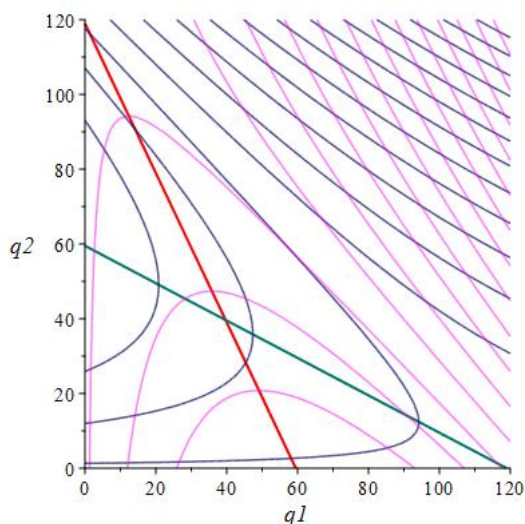


Obr. 3.1: Výstupy a reakční křivky Cournotova modelu (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)

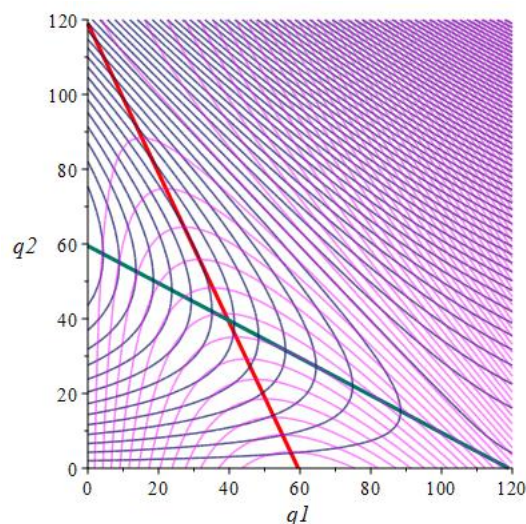
- ▷ Zisk oligopolu K1 $\pi_1 = \frac{119}{3} \left(120 - \left(\frac{119 * 2}{3} \right) \right) - \frac{119}{3} = \frac{14161}{9} \approx 1573,4$
- ▷ Zisk oligopolu CS2 $\pi_2 = \frac{119}{3} \left(120 - \left(\frac{119 * 2}{3} \right) \right) - \frac{119}{3} = \frac{14161}{9} \approx 1573,4$
- ▷ Celková nabídka na trhu bude $Q = q_1 + q_2 = \frac{119}{3} + \frac{119}{3} = \frac{238}{3} \approx 79$
- ▷ Tržní cena na trhu bude $P = 120 - b(Q) = 120 - \left(\frac{2 * 119}{3} \right) \approx 41$
- ▷ Cournotova rovnováha je tzv. optimální množství q_1^*, q_2^* obou firem, které maximalizuje společný zisk

$$q_1^* = \frac{119}{3} = q_2^* = \frac{119}{3}$$

A co takový případ, když se duopolisté vzájemně domluví a budou vyrábět množství q_{1mon}, q_{2mon} jako by byli monopolisté? Hra je nyní mimo rovnovážný bod a stává se nestabilní.



(a) Izoziskové křivky & reakční křivky K1 a CS2 (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)



(b) Izoziskové křivky & reakční křivky K1 a CS2 (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)

3.2.2 Izo-křivky

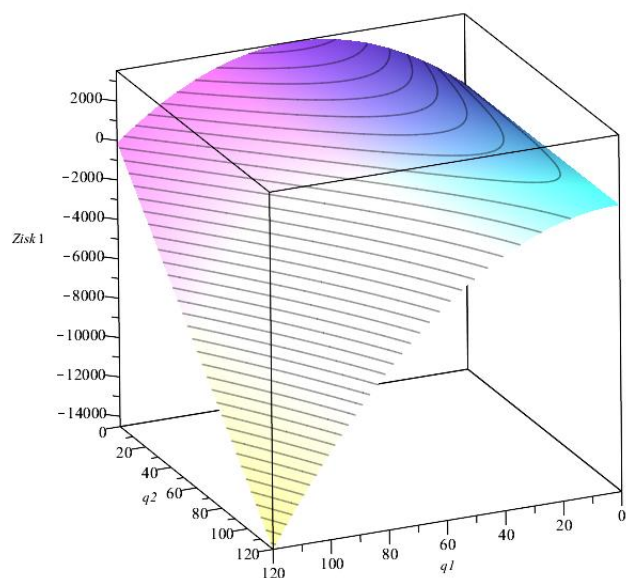
Zisková funkce K1 je $\pi_1 = Pq_1 - TC_1 = [120 - (q_1 + q_2)]q_1 - q_1$. Jejím grafem je hyperbolický paraboloid. Izozisková křivka (*z angl. Isoprofit Curve*) je taková křivka, která spojuje všechny kombinace vstupů (q_1, q_2) ve kterých dochází k stejnému zisku π_i .

Izozisky firmy K1 jsou zobrazeny jako křivky, které obsahují všechny výstupy q_1, q_2 , které přináší firmě K1 stejný zisk π_1 . S pevným množstvím q_1 zisk firmy K1 stoupá, pokud množství firmy CS2 q_2 klesá.

Lze vidět, že K1 dosahuje nejvyššího zisku při $q_1 = 59.5$, kdyby byla na trhu jako monopol, tedy CS2 by vyráběla $q_2 = 0$. Reakční křivka společnosti K1 prochází právě všemi vrcholy izoziskových křivek této firmy. Analogicky takové pravidlo platí i pro CS2 – reakční křivka prochází všemi vrcholy izoziskových křivek.

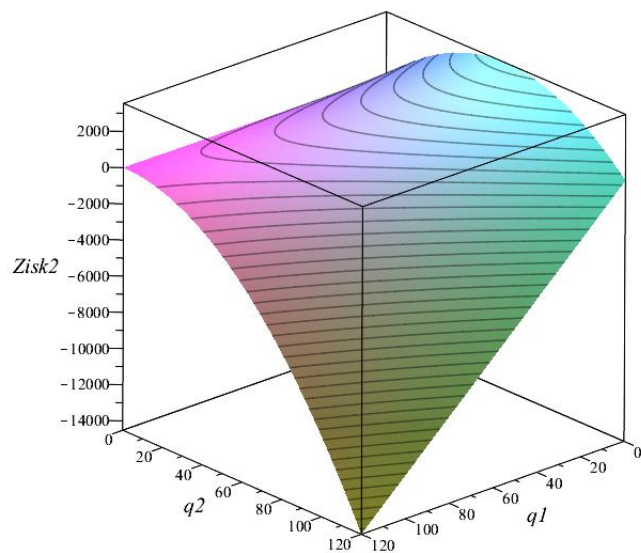
Ale existuje dvojice, která „dává“ vyšší zisky pro obě společnosti zároveň?

Odpovědí je Cournotova rovnováha. Jak již bylo vysvětleno jedná se o optimální stav, kdy $E^* = (q_1^*, q_2^*)$, jenž označuje výstupy, které maximalizují celkový zisk obou firem.

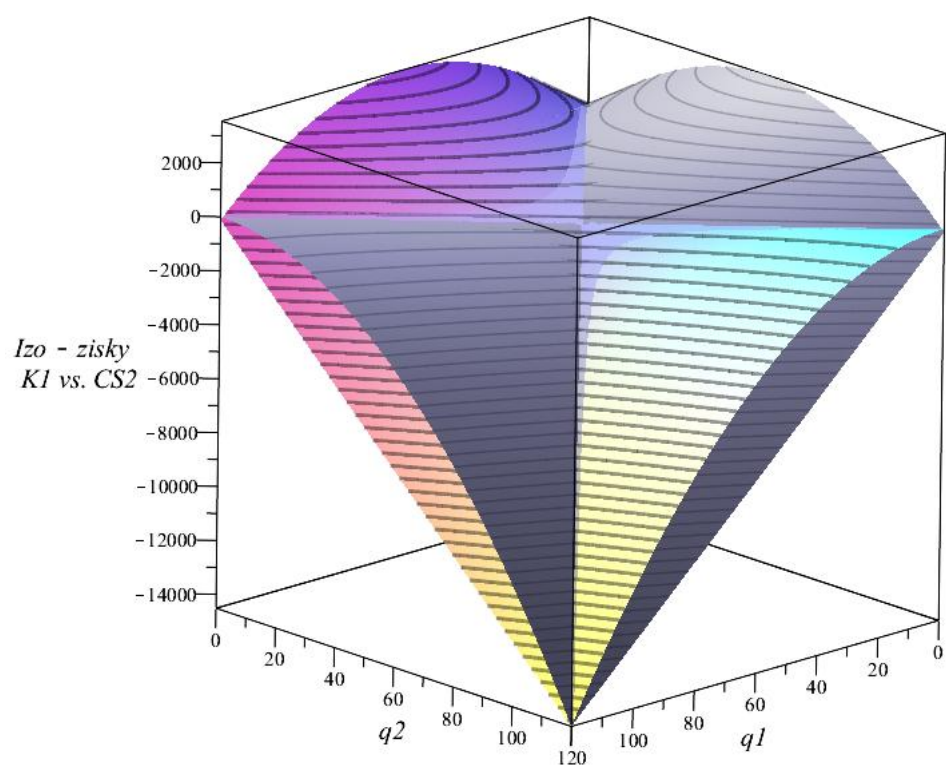


Obr. 3.3: Izoziskové křivky K1 (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)

Zisk firmy CS2 dosahuje svého maxima pro $q_2 = 59.5$, kdyby byla na trhu jako monopol a tedy K1 by vyráběla $q_1 = 0$.



Obr. 3.4: Izoziskové křivky CS2 (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)



Obr. 3.5: Izoziskové křivky K1 vs. CS2 (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)

3.3 Dynamický Cournotův model

Cílem této kapitoly je obdržení matematických struktur, univerzálně použitelných pro dvě firmy, které o sobě na trhu vědí, že jsou si nejvíce navzájem konkurencí. Pomocí těchto struktur chtějí zjistit, kdy se jejich celková ziskovost dostává do rovnováhy, nebo naopak se z ní vychýlí. Dále předpokládáme, že

- ▷ v odvětví se nacházejí dvě firmy označeny jako $i = X, Y$
- ▷ produkující nediferencovaný produkt na trhu
- ▷ obě firmy chtějí maximalizovat vlastní zisk

Jejich cílem je vybrat takové vstupy, které jejich zisky maximalizují. Své současné výstupy (strategie) však přizpůsobují na základě zpožděných informací v některých předchozích obdobích $t - S_i$ ¹.

V reálném ději předpokládáme, že žádný duopolista nemá k dispozici úplné informace o poptávce a snaží se vyvodit, jak trh bude reagovat, pomocí empirického odhadu mezního zisku. Odhady lze získat průzkumem trhu nebo krátkými pokusy v malých výrobních změnách provedených na začátku období t . [[4], s. 364], [35]

Cournotův model obsahuje zpoždění právě proto, že firmy rozhodují o svých výstupech v čase t v závislosti na minulých rozhodnutích. [35] Vlastní informace o předcházející výrobě, tedy hodnocení vlastního mezního zisku pro hráče trhu trhu může být mnohdy více přesnější, než úvaha nad tím *Jaký bude asi výstup mého protihráče?*

Tržní cena v období t je určena celkovou nabídkou ve tvaru

$$Q(t) = x(t) + y(t), \text{ kde } x \text{ přísluší firmě X a } y \text{ firmě Y}$$

a poptávkou

$$P = a - b(x(t) + y(t)), \text{ kde } a > 0, b > 0 \text{ [24]} \quad (3.3.1)$$

Realizujeme hru o trh, kde jsou dvě firmy ve formě duopolu. Výstupy (produkovaná množství) firmy X a Y jsou proměnné v čase t .

$$x(t) \mapsto \text{výstup firmy X v čase } t \quad (3.3.2)$$

$$y(t) \mapsto \text{výstup firmy Y v čase } t \quad (3.3.3)$$

¹ $S_i \geq 0$ představuje zpoždění při realizaci informací o vlastním výstupu (viz kapitola 3.3.1).

Ve statickém modelu jsme uvažovali zisky jednotlivých firem následovně, při stejných významech vystupujících koeficientů jako v kapitole 3.1, označíme $q_1 = x, q_2 = y, c_1 = c_x, c_2 = c_y$

$$\pi_1(x, y) = x(a - b(x + y)) - c_x x \quad (3.3.4)$$

$$\pi_2(x, y) = y(a - b(x + y)) - c_y y \quad (3.3.5)$$

[24]

Zisky firem pro další výpočty označíme následovně $\pi_i(x, y) = x_k$.

Předpokládejme, že firmy průběžně upravují výstupy přímo úměrné ke změně jejich výnosů.[24] Tato dynamika je modelována 2–rozměrným systémem ODEs mající formu

$$\dot{x}_k = \alpha_k \frac{\partial \pi_k}{\partial x_k}, \text{ pro } k = 1, 2 \quad [24] \quad (3.3.6)$$

Kde proměnná $\alpha_k > 0$ udává míru změny ceny výrobku s mezním ziskem pro jednotlivé firmy. [24]

Pro náš případ dvou firem označíme $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2 = \beta$. Každá z firem X, Y adaptivně přizpůsobuje svůj výstup. Takovým způsobem, že míra výstupu je přímo úměrná rozdílu mezi ziskem maximalizující výstup a aktuálním výstupem.[24] Dosazením explicitní formy mezního zisku firem $k = 1, 2$ do 3.3.6 obdržíme časové spojitý oligopolní model. Tento dynamický model lze vyjádřit ve tvaru soustavy dvou diferenciálních rovnic prvního řádu:

$$\dot{x}(t) = \alpha(a - c_x - 2bx(t) - by(t)) \quad [24] \quad (3.3.7)$$

$$\dot{y}(t) = \beta(a - c_y - 2by(t) - bx(t))$$

[24]

(3.3.8)

kde koeficienty $\alpha, \beta, a, b, c_x, c_y$ jsou kladné hodnoty.

Jak nastolit rovnováhu v této hře o trh?

Obecně pro zajištění stability Cournotova modelu, stačí ukázat, že všechna vlastní čísla matice koeficientů 3.3.7 mají negativní reálné části. Systém 3.3.7 je vždy lokálně stabilní. U lineárních modelů vede lokální stabilita ke globální stabilitě. [24]

Teorém 1

Časově spojitý dynamický model 3.3.7 je globálně asymptoticky stabilní.[24]

3.3.1 Cournotův model se zpožděním – algebraické řešení

Kromě tohoto základního dynamického modelu 3.3.7 se zkoumá i příslušný model zahrnující časové zpoždění

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \alpha(a - c_x - 2bx(t - S_x) - by(t - T_x)) \\ \dot{y}(t) &= \beta(a - c_y - 2by(t - S_y) - bx(t - T_y))\end{aligned}\tag{3.3.9}$$

[24]

Jak model k zpoždění přišel?

Význam zpoždění T_k, S_k je následující. Firmě k se vyskytne jednak časové zpoždění $T_k \geq 0$ zapříčiněné získáváním informací o výstupu protihráče (informaci o jeho strategii) a časové zpoždění $S_k \geq 0$ při realizaci informací o vlastním výstupu.[24]

Protože rovnovážné stavy 3.1.9 odpovídají konstantním řešením daného modelu, časová zpoždění na jejich tvar nemají vliv.

Z tohoto důvodu jsou rovnovážné stavy pro 3.3.7 a 3.3.9 totožné. Při jejich určení předpokládáme $x(t) \equiv x$ a $y(t) \equiv y$ a pro nalezení extrému, kdy derivace x a derivace y je rovna nule, dosazením do 3.3.7 dostáváme

$$\begin{aligned}0 &= \alpha(a - c_x - 2bx - by) \\ 0 &= \beta(a - c_y - 2by - bx)\end{aligned}$$

Postupným vyjádřením hodnot x a y z těchto rovnic dostáváme reakční křivky R_1, R_2

$$\begin{aligned}a - c_x - 2bx - by &= 0 \Rightarrow x = \frac{a - c_x - by}{2b} = R_1(y) \\ a - c_y - bx - 2by &= 0 \Rightarrow y = \frac{a - c_y - bx}{2b} = R_2(x)\end{aligned}$$

Řešení této soustavy pak probíhá takto:

$$\begin{aligned}x &= \frac{-by}{2b} - \frac{-c_x}{2b} + \frac{a}{2b} \\ x &= \frac{-1}{2} \left(\frac{a}{2b} - \frac{x}{2} - \frac{c_y}{2b} \right) - \frac{c_x}{2b} + \frac{a}{2b} \\ x &= \frac{-a}{4b} + \frac{x}{4} + \frac{c_y}{4b} - \frac{c_x}{2b} + \frac{a}{2b} \\ x - \frac{x}{4} &= \frac{a + c_y - 2c_x}{4b} \Rightarrow x^* = \frac{a - 2c_x + c_y}{3b}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y &= \frac{-bx}{2b} - \frac{-c_x}{2b} + \frac{a}{2b} \\
y &= \frac{-1}{2} \left(\frac{a}{2b} - \frac{y}{2} - \frac{c_x}{2b} \right) - \frac{c_y}{2b} + \frac{a}{2b} \\
y &= \frac{-a}{4b} + \frac{y}{4} + \frac{c_x}{4b} - \frac{c_y}{2b} + \frac{a}{2b} \\
y - \frac{y}{4} &= \frac{a + c_x - 2c_y}{4b} \Rightarrow y^* = \frac{a - 2c_y + c_x}{3b}
\end{aligned}$$

Ekvilibrum (rovnováha) firem X a Y

$$E^* = \left[\frac{a - 2c_x + c_y}{3b}, \frac{a - 2c_y + c_x}{3b} \right] \quad (3.3.10)$$

Získaný rovnovážný stav E^* je tedy určen jednoznačně (je tedy jediný) a je stejný pro oba uvažované modely [7], to však již neplatí pro stabilitu rovnovážného bodu.

Nejprve posoudíme stabilitu rovnovážného bodu E^* pro základní model 3.3.7.

Tento model je autonomní (na čase explicitně nezávislý) a nehomogenní. Protože nehomogenní člen nemá na stability systémů vliv, posoudíme stabilitu příslušné homogenní části (ve smyslu, že vypustíme konstantní členy)

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= \alpha(-2bx(t) - by(t)) \\
\dot{y}(t) &= \beta(-2by(t) - bx(t))
\end{aligned} \quad (3.3.11)$$

Vlastní čísla matice systému jsou řešením kvadratické rovnice

$$\lambda^2 + \lambda(2\alpha b + 2\beta b) + 4b^2\alpha\beta - \alpha\beta b^2 = 0$$

po úpravě

$$\lambda^2 + \lambda 2b(\alpha + \beta) + 3b^2\alpha\beta = 0$$

Jde o rovnici 2. stupně, který má všechny koeficienty kladné to vede k závěru (dle tvrzení ze str. 25), že systém bez časového zpoždění je asymptoticky (viz str. 24) i globálně stabilní [[37], s. 120]. Důkaz získáme i ověřením *Hurwitzova kritéria*.

VĚTA 3.3.1 Hurwitzovo kritérium: *Systém je stabilní, když determinant H_n a všechny subdeterminanty H_{n-1} a H_1 jsou kladné.*[39]

Koeficienty b, α, β jsou kladné, matice H je ve tvaru

$$H = \begin{bmatrix} 2b(\alpha + \beta) & 0 \\ 1 & 3b^2\alpha\beta \end{bmatrix}$$

pro subdeterminanty tedy platí $H_1 = 2b(\alpha + \beta) > 0$, $H_2 = 6b^3\alpha\beta(\alpha + \beta) > 0$. Dle věty 3.3.1 je systém stabilní pro všechny přípustné hodnoty vstupních parametrů b, α, β .

Předpoklad 1 $T_x = T_y = 0$, pro zjednodušení modelu předpokládejme, že zpožděné informace o výstupu konkurence nemají na firmy X, Y dopad.

Vycházíme z analýzy lokální stability. S tímto účelem uvažujeme homogenní systém systému 3.3.9 ve tvaru

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \alpha(-2bx(t - S_x) - by(t)) \\ \dot{y}(t) &= \beta(-2by(t - S_y) - bx(t))\end{aligned}$$

pak výsledný systém lze zapsat v maticovém tvaru

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} x(t - S_x) \\ y(t - S_x) \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} x(t - S_y) \\ y(t - S_y) \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\alpha b \\ -\beta b & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2\alpha b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\beta b \end{pmatrix}$$

Pak charakteristická rovnice systému má tvar

$$\begin{aligned}\det[\lambda E - A - Be^{-\lambda S_x} - Ce^{-\lambda S_y}] &= 0 \\ \det \left[\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -\alpha b \\ -\beta b & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2\alpha be^{-\lambda S_x} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\beta be^{-\lambda S_y} \end{pmatrix} \right] &= 0 \\ \det \left[\begin{pmatrix} \lambda + 2\alpha be^{-\lambda S_x} & \alpha b \\ \beta b & \lambda + 2\beta be^{-\lambda S_y} \end{pmatrix} \right] &= 0 \\ (\lambda + 2\alpha be^{-\lambda S_x})(\lambda + 2\beta be^{-\lambda S_y}) - \alpha\beta b^2 &= 0\end{aligned}$$

Charakteristická rovnice 2. stupně je ve výsledném tvaru

$$\lambda^2 + \lambda(2\alpha be^{-\lambda S_x} + 2\beta be^{-\lambda S_y}) + 4b^2\alpha\beta e^{-\lambda(S_x + S_y)} - \alpha\beta b^2 = 0 \quad (3.3.12)$$

Vzhledem k větě 3.3.1 je systém 3.3.9 pro firmy X, Y (duopol) lokálně stabilní v případě zanedbání zpoždění. Přestože se bude předpokládat nepřítomnost zpoždění o informaci, jaký bude protihráčův výstup, $T_x = T_y = 0$, stále je dynamický model 3.3.9 komplikovanější skrze výrazného zpoždění $S_x > 0, S_y > 0, S_x \neq S_y$. V další části budeme řešit tato zpoždění.

Cournotův model s jedním zpožděním

Model bude řešen ve dvou krocích. V prvním kroku nastavíme jedno zpoždění pro firmu Y, v druhém kroku nastavíme dvě zpoždění pro obě firmy X, Y

Nechť **1. krok** $S_x = 0$ a $S_y > 0$. Hledáme hodnotu kritické hodnoty zpoždění. Snížení na jedno konstantní (diskrétní) zpoždění S_y charakteristické rovnice 3.3.12 obdržíme tvar

$$\lambda^2 + \lambda(2\alpha b + 2\beta b e^{-\lambda S_y}) + 4b^2 \alpha \beta e^{-\lambda S_y} - \alpha \beta b^2 = 0 \quad (3.3.13)$$

Z komplexní analýzy je známo, že tato rovnice má nekonečně mnoho komplexních kořenů, přičemž jejich exaktní nalezení není proveditelné. Proto pro analýzu stability použijeme tzv. dekompoziční metodu, která umožní najít hranici hledané oblasti asymptotické stability. Tuto hranici získáme tak, že předpokládáme, že tato rovnice 3.3.13 má kořen s nulovou reálnou částí. [7]

Rozlišíme dva případy pro hodnoty λ

$$\lambda = 0 \text{ a } \lambda = i\omega,$$

kde kladná konstanta $\omega \in R, \omega \neq 0$

Dosazením $\lambda = 0$ do rovnice 3.3.13 lze ověřit, že není řešením této rovnice. Přesněji vyjádřeno po dosazení $\lambda = 0$ dostáváme vztah, který není splněn pro žádné kladné vstupní hodnoty a, b, α, β .

Uvedme druhý případ. Nechť $\lambda = i\omega$, (kde $\omega > 0$) je řešení 3.3.13 (vzhledem k symetrii se stačí omezit na kořeny s kladnou imaginární částí).

S využitím Eulerových vztahů² $e^{i\omega} = \cos(\omega) + i\sin(\omega)$, $e^{-i\omega} = \cos(\omega) - i\sin(\omega)$ dosadíme do 3.3.13 uvedený ryze imaginární kořen $\lambda = i\omega$ a dostáváme

$$-\omega^2 + 2\alpha b \omega i - \alpha \beta b^2 + 2\beta b(i\omega + 2\alpha b)e^{i\omega S_y} = 0,$$

$$\text{tj. } 2\alpha b \omega i + 2\beta b(i\omega + 2\alpha b)(\cos\omega S_y - i\sin\omega S_y) = \omega^2 + \alpha \beta b^2,$$

a tedy

$$2\alpha b \omega i + 2\beta b(i\omega \cos\omega S_y + 2\alpha b \cos\omega S_y + \omega \sin\omega S_y - 2i\alpha b \sin\omega S_y) = \omega^2 + \alpha \beta b^2.$$

V poslední rovnici porovnáme reálnou a imaginární část

$$2\beta b(2\alpha b \cos\omega S_y + \omega \sin\omega S_y) = \omega^2 + \alpha \beta b^2, \quad (3.3.14)$$

$$2\beta b(\omega \cos\omega S_y - 2\alpha b \sin\omega S_y) = -2\alpha b \omega$$

² $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$

Umocněním obou rovnic a následným sečtením obdržíme

$$16\beta^2\alpha^2b^4 + \omega^24\beta^2b^2 - \omega^4 - 2\alpha\beta b^2\omega^2 - \alpha^2\beta^2b^4 - 4\alpha^2b^2\omega^2 = 0 \quad (3.3.15)$$

Dostáváme tedy algebraickou rovnici 4. stupně pro hledanou neznámou ω ve tvaru

$$\omega^4 - 2b^2\omega^2(2\beta^2 - \alpha\beta - 2\alpha^2) - 15\beta^2\alpha^2b^4 = 0, \quad (3.3.16)$$

která po substituci $\omega^2 = \mu$ přechází v příslušnou kvadratickou rovnici.

$$\mu^2 - 2b^2(2\beta^2 - 2\alpha^2 - \alpha\beta)\mu - 15\alpha^2\beta^2b^4 = 0 \quad (3.3.17)$$

Kořeny kvadratické rovnice po vytknutí $\sqrt{4b^4} = 2b^2$ z diskriminantu D , jsou pak při přeznačení $D = 2b^2D^*$ ve tvaru

$$\mu_{1,2} = \frac{2b^2(2\beta^2 - \alpha\beta - 2\alpha^2) \pm 2b^2\sqrt{D^*}}{2} \quad (3.3.18)$$

kde upravený diskriminant má tvar

$$D^* = (2\beta^2 - \alpha\beta - 2\alpha^2)^2 + 15\alpha^2\beta^2 \quad (3.3.19)$$

a je zřejmé, že $D^* > 0$, a tedy platí pro kořeny μ_1 a μ_2

$$\mu_1 = b^2((2\beta^2 - \alpha\beta - 2\alpha^2) + \sqrt{D^*}) > 0$$

a pro

$$\mu_2 = b^2((2\beta^2 - \alpha\beta - 2\alpha^2) - \sqrt{D^*}) < 0$$

ω_+ označme jako vstupující kladný kořen a ω_- jako záporný vstupující kořen.
Obecně získáme hodnotu pro hledanou ω^2

$$\omega_{\pm}^2 = b^2((2\beta^2 - \alpha\beta - 2\alpha^2) \pm \sqrt{D^*}) \quad (3.3.20)$$

Vyjádříme hodnotu ω_{\pm} , ale pouze pro μ_1 , protože v dalších částech výpočtu je třeba uvažovat pouze reálné kořeny a kořeny pro μ_2 jsou odmocninou záporné hodnoty. Musí platit, že ω spadá do reálných čísel.

$$\omega_+^2 = \mu_1 = b^2((2\beta^2 - \alpha\beta - 2\alpha^2) + \sqrt{D^*}) \quad (3.3.21)$$

Po odmocnění získáme hodnotu

$$\omega_{\pm} = \pm\sqrt{\mu_1} = \pm b\sqrt{(2\beta^2 - \alpha\beta - 2\alpha^2) + \sqrt{D^*}} \quad (3.3.22)$$

Substitucí kladného kořene ω_+ do rovnic vyjádřené v reálné a imaginární části 3.3.14 obdržíme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} 4\alpha\beta b^2 \cos\omega_+ S_y + 2\beta b\omega_+ \sin\omega_+ S_y &= \omega_+^2 + \alpha\beta b^2 \\ 2\beta b\omega_+ \cos\omega_+ S_y - 4\alpha\beta b^2 \sin\omega_+ S_y &= -2\alpha b\omega_+ \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

kterou řešíme následovně

$$\begin{aligned} 4\alpha\beta b^2 \cos\omega_+ S_y + 2\beta b\omega_+ \sin\omega_+ S_y &= \omega_+^2 + \alpha\beta b^2 \bigg/ \cdot (\omega_+) \\ 2\beta b\omega_+ \cos\omega_+ S_y - 4\alpha\beta b^2 \sin\omega_+ S_y &= -2\alpha b\omega_+ \bigg/ \cdot (-2\alpha b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cancel{4\omega_+ \alpha\beta b^2 \cos\omega_+ S_y} + 2\beta b\omega_+^2 \sin\omega_+ S_y &= \omega_+^3 + \alpha\beta b^2 \omega_+ \\ \cancel{-4\omega_+ \alpha\beta b^2 \cos\omega_+ S_y} + 8\alpha^2 \beta b^3 \sin\omega_+ S_y &= 4\alpha^2 b^2 \omega_+ \end{aligned}$$

Vyjádřením proměnné $\sin\omega_+ S_y$

$$\begin{aligned} (2\beta b\omega_+^2 + 8\alpha^2 \beta b^3) \sin\omega_+ S_y &= \omega_+^3 + \alpha\beta b^2 \omega_+ + 4\alpha^2 b^2 \omega_+ \\ \sin\omega_+ S_y &= \frac{\omega_+ (\omega_+^2 \alpha\beta b^2 + 4\alpha^2 b^2)}{2\beta b(\omega_+^2 + 4\alpha^2 b^2)} \end{aligned}$$

a zpětným dosazením $\sin\omega_+S_y$ do např. první rovnice ze soustavy 3.3.23 vyjádříme $\cos\omega_+S_y$

$$\begin{aligned}
2\beta b\omega_+\cos\omega_+S_y - \alpha\omega_+ \cdot 2\beta b \frac{\omega_+(\omega_+^2 + \alpha\beta b^2 + 4\alpha^2b^2)}{2\beta b(\omega_+^2 + 4\alpha^2b^2)} &= -2\alpha b\omega_+ \\
2\beta b\omega_+\cos\omega_+S_y - 2\alpha b \frac{\omega_+(\omega_+^2 + \alpha\beta b^2 + 4\alpha^2b^2)}{\omega_+^2 + 4\alpha^2b^2} &= -2\alpha b\omega_+ / \cdot \frac{1}{2b} \\
\beta\omega_+\cos\omega_+S_y &= \frac{\alpha\omega_+(\omega_+^2\alpha\beta b^2 + 4\alpha^2b^2) - \alpha\omega_+(\omega_+^2 + 4\alpha^2b^2)}{\omega_+^2 + 4\alpha^2b^2} \\
\cos\omega_+S_y &= \frac{\alpha\omega_+(\omega_+^2\alpha\beta b^2 + 4\alpha^2b^2) - \alpha\omega_+(\omega_+^2 + 4\alpha^2b^2)}{\omega_+\beta(\omega_+^2 + 4\alpha^2b^2)} \\
\cos\omega_+S_y &= \frac{\omega_+(\cancel{\alpha\omega_+^2} + \alpha^2\beta b^2 + \cancel{4\alpha^3b^2} - \cancel{\alpha\omega_+^2} - \cancel{4\alpha^3b^2})}{\omega_+(\beta(\omega_+^2 + 4\alpha^2b^2))} \\
\cos\omega_+S_y &= \frac{\beta(\alpha^2b^2)}{\beta(\omega_+^2 + 4\alpha^2b^2)} \\
\cos\omega_+S_y &= \frac{\alpha^2b^2}{\omega_+^2 + 4\alpha^2b^2}
\end{aligned}$$

Z rovnice $\cos\omega_+S_y$, resp. $\sin\omega_+S_y$ chceme získat hodnotu zpoždění S_y

$$\cos\omega_+S_y = \frac{\beta(\alpha^2b^2)}{\beta(\omega_+^2 + 4\alpha^2b^2)}$$

využitím inverzní funkce arccosinus tak obdržíme

$$\omega_+S_y = \arccos\left[\frac{\alpha^2b^2}{\omega_+^2 + 4\alpha^2b^2}\right]$$

a osamostatněním S_y dostáváme

$$S_y^{D0} = \frac{1}{\omega_+} \cos^{-1}\left[\frac{\alpha^2b^2}{\omega_+^2 + 4\alpha^2b^2}\right]$$

Stejnými kroky lze osamostatnit S_y ze $\sin\omega_+S_y$

$$S_y^{D0} = \frac{1}{\omega_+} \sin^{-1}\left[\frac{\omega_+(\omega_+^2\alpha\beta b^2 + 4\alpha^2b^2)}{2\beta b(\omega_+^2 + 4\alpha^2b^2)}\right]$$

Platí-li tato podmínka S_y , pak existuje nulový kořen, který přepíná stabilitu. Pomocí tzv. *kritické hodnoty* S_y^{D0} víme, kdy přepíná, ale nevíme, na které pozici se nacházíme, zda ve stabilitě nebo nestabilitě. Protože existuje jedinečná $\theta = \omega_+S_y \in (0, 2\pi]$ obě rovnice jsou si rovny. Hodnoty pravých stran těchto rovnic jsou stejné.

Hodnota θ zpoždění představuje tzv. *přepínač* stability, a to buď ve směru asymptotické stability do nestability nebo naopak. Cílem dalších úvah je posoudit tyto varianty.

Aby bylo možné pozorovat přepínání stability, musíme určit znaménka derivace reálné části $Re[\lambda(S_y)]$ v bodě, kde je $\lambda(S_y)$ čistě imaginární. Výpočet implicitní diferenciací rovnice z rovnice 3.3.13 s ohledem na S_y se provede takto.

Nechť λ je funkce, kterou hledáme pro řešení rovnice 3.3.13, kde S_y je její argument.

$$2\lambda \frac{d\lambda}{dS_y} + 2\lambda b \frac{d\lambda}{dS_y} + 2\beta b e^{-\lambda S_y} \frac{d\lambda}{dS_y} - 2\beta b \lambda (\lambda + 2\alpha b) e^{-\lambda S_y} - 2\beta b (\lambda + 2\alpha b) e^{-\lambda S_y} S_y = 0$$

$$[2(\lambda + \alpha b - \beta b e^{-\lambda S_y}) - 2\beta b (\lambda + 2\alpha b) e^{-\lambda S_y} S_y] \frac{d\lambda}{dS_y} = 2\beta b \lambda (\lambda + 2\alpha b) e^{-\lambda S_y}$$

$$2[(\lambda + \alpha b + b\beta e^{-\lambda S_y}) - \beta b (\lambda + 2\alpha b) e^{-\lambda S_y} S_y] \frac{d\lambda}{dS_y} = 2\lambda \beta b (\lambda + 2\alpha b) e^{-\lambda S_y}.$$

Dále pro vyhodnocení znamének reálné části, ještě určíme znaménko (cílem je posoudit stabilitu duopolního modelu) pro implicitní rovnici $(\frac{d\lambda}{dS_y})^{-1} = \frac{dS_y}{d\lambda}$ rovnice 3.3.13, kde S_y je funkce, kterou hledáme pro řešení rovnice 3.3.13 a λ bude tentokrát argument.

$$2\beta b (\lambda + 2\alpha b) (-\lambda) e^{-\lambda S_y} + 2\lambda + \alpha b + 2\beta b (\lambda + 2\alpha b) e^{-\lambda S_y} (-S_y) \frac{dS_y}{d\lambda} = 0$$

$$[2\beta b (\lambda + 2\alpha b) (\lambda) e^{-\lambda S_y}] \frac{dS_y}{d\lambda} = 2\lambda + \alpha b + 2\beta b (\lambda + 2\alpha b) e^{-\lambda S_y} (-S_y)$$

$$\frac{dS_y}{d\lambda} = \frac{2(\lambda + \alpha b) e^{\lambda S_y}}{2\lambda \beta b (\lambda + 2\alpha b)} - \frac{2\beta b (\lambda + 2\alpha b) e^{-\lambda S_y} S_y}{2\beta b (\lambda + 2\alpha b) e^{-\lambda S_y}}$$

$$\frac{dS_y}{d\lambda} = \frac{(\lambda + \alpha b) e^{\lambda S_y}}{\lambda \beta b (\lambda + 2\alpha b)} - \frac{S_y}{\lambda}$$

kde $e^{\lambda S_y}$ známe z rovnice 3.3.13

$$2\beta b (\lambda + 2\alpha b) e^{-\lambda S_y} \alpha \beta b^2 - 2\alpha b \lambda - \lambda^2 = 0$$

$$\frac{1}{e^{\lambda S_y}} = \frac{\alpha \beta b^2 - 2\alpha b \lambda - \lambda^2}{2\beta b (\lambda + 2\alpha b)}$$

$$e^{\lambda S_y} = \frac{2\beta b (\lambda + 2\alpha b)}{\alpha \beta b^2 - 2\alpha b \lambda - \lambda^2}$$

Abychom posoudili stabilitu duopolního modelu s jedním zpožděním hledáme jak reaguje reálná část λ na zpoždění

$$\begin{aligned} \left[\frac{d(Re\lambda)}{dS_y} \right] &= \left[Re \left(\frac{d\lambda}{dS_y} \right)^{-1} \right]_{\lambda=wi_+} \\ &= \left[\frac{(\lambda + \alpha b) e^{\lambda S_y}}{\lambda \beta b (\lambda + 2\alpha b)} - \frac{-S_y}{\lambda} \right]_{\lambda=wi_+} \end{aligned}$$

Dosadíme $e^{\lambda S_y} = \frac{2\beta b(\lambda+2\alpha b)}{\alpha\beta b^2-2\alpha b\lambda-\lambda^2}$

$$\begin{aligned} \left[\frac{d(Re\lambda)}{dS_y} \right] &= \left[Re \left(\frac{d\lambda}{dS_y} \right)^{-1} \right]_{\lambda=wi_+} \\ &= \left[\frac{(\lambda + \alpha b)(-2\beta b(\lambda + 2\alpha b))}{\lambda\beta b(\lambda + 2\alpha b)(-\alpha\beta b^2 + 2\alpha\beta\lambda + \lambda^2)} - \frac{1}{\lambda(\lambda + 2\alpha b)} \right]_{\lambda=wi_+} \\ &= \left[\frac{-2(\lambda + 2\alpha b)}{\lambda(-\alpha\beta b^2 + 2\alpha\beta\lambda + \lambda^2)} - \frac{1}{\lambda(\lambda + 2\alpha b)} \right]_{\lambda=wi_+} \end{aligned}$$

dosazením $\lambda = wi_+$ získáváme tvar

$$= \left[\frac{-2(\omega i + \lambda b)}{\omega i(-\alpha\beta b^2 + \alpha b\omega i - \omega^2)} - \frac{1}{\omega i(\omega i + 2\alpha b)} \right]$$

Pro přehlednost z prvního a druhého zlomku vyjádříme reálné části

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{2(\omega i + \lambda b)}{i(\alpha\beta b^2\omega + \omega^3) + 2\omega^2\alpha b} \cdot \frac{-i(\alpha\beta b^2\omega + \omega^3) + 2\omega^2\alpha b}{-i(\alpha\beta b^2\omega + \omega^3) + 2\omega^2\alpha b} = \\ &= \frac{4\omega^3 i\lambda b + 4\omega^2 \lambda^2 b^2 + 2\omega^2 \alpha\beta b^2 - 2\omega i\alpha^2\beta b^3 + 2\omega^4 - 2i\omega^3\alpha b}{(2\omega^2\alpha b)^2 + (\alpha\beta b^2\omega + \omega^2)^2} \\ &\rightarrow Re(r_1) = \frac{2(\alpha^2 b^2 + \alpha\beta b^2 + \omega^2)}{(2\omega^2\alpha b)^2 + (\alpha\beta b^2\omega + \omega^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2 &= \frac{1}{-\omega^2 + 2\alpha b\omega i} \cdot \frac{\omega^2 + 2\alpha b\omega i}{\omega^2 + 2\alpha b\omega i} = \\ &= \frac{\omega^2 + 2\alpha b\omega i}{-(\omega^4 + 4\alpha^2 b^2 \omega^2)} \\ &\rightarrow Re(r_2) = \frac{-1}{4\alpha b^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Získané reálné části těchto dvou zlomků $\left[R_e(r_1), R_e(r_2) \right]$ sloučíme zpět do jednoho výrazu a do získaného výrazu následně dosadíme za $\omega_+^2 = b^2((2\beta^2 - \alpha\beta - 2\alpha^2) + \sqrt{D})$. Derivace reálné části λ . A určíme jak se chová reálná část kořenů rovnice na změnu S_y .

$$\begin{aligned}
& \left[Re(r_1) + Re(r_2) \right] \\
& \left[\frac{-2(\omega_+^2 \alpha \beta b^2 + 2\alpha^2 b^2)}{(2\omega_+^2 \alpha b)^2 + (\alpha \beta b^2 \omega_+ + \omega_+^2)^2} - \frac{1}{4\alpha b^2 + \omega_+^2} \right] \\
& \left[2(\omega_+^2 + \alpha \beta b^2) + 4b^2(\alpha^2 - \beta^2) \right] \\
& 2(2b^2\beta^2 - 2\alpha^2b^2 - \alpha\beta b^2 + b^2\sqrt{D} + \alpha\beta b^2) + 4\alpha^2b^2 - 4\beta^2b^2 \\
& 4\beta^2b - 4\beta^2b - 4\alpha^2b^2 + 4\alpha^2b^2 - 2\alpha\beta b^2 + 2\alpha\beta b^2 + 2b^2\sqrt{D} \\
& \left[2b^2\sqrt{D} \right] > 0
\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

Závěr kroku 1

Pro dané vstupní parametry α, β, b, a existuje kritická hodnota zpoždění S_y^{D0} , při které má alespoň jeden kořen rovnice nulovou reálnou část. Jeli hodnota zpoždění S_y mezi nulou a kritickou hodnotou, tak je charakteristická rovnice 3.3.13 asymptoticky stabilní a v momentě, kdy přechází přes kritickou hodnotu S_y^{D0} , tak je asymptoticky nestabilní.

Kritickou hodnotu S_y^{D0} lze chápat jako určitý přepínač stability. Hodnota zpoždění promítá realitu do modelování ekonomiky, kde jsou vždy zpoždění vzhledem k definování a zavedení nějakých rozhodnutí v rámci firmy. Můžeme předpokládat, že firmy reagují na průměrné historické informace nežli na rychlé aktuální změny trhu, z tohoto důvodu bude vždy zpoždění existovat mezi dobou, kdy informace získají, a mezi dobou, kdy rozhodnutí provedou neboli, pro duopolní model jde o zpoždění mezi časem, kdy informaci o množství protihráče obdrží, a mezi časem kdy na toto množství zareaguje. Díky kritické hodnotě lze určit, kdy se firma se na základě informace o výstupu konkurenční oligopolní firmy spolu přepnou do rovnováhy. Čím větší je zpoždění informace o výstupu konkurence pro firmu, tím pravděpodobněji se dostane do nerovnováhy.

Rovnováhu duopolního modelu lze z předchozích propočtů zkonstruovat a sledovat vliv zpoždění na jejich stabilitu.

Teorém 2

Diskrétní duopolní model se zpožděním $S_y > 0$ a $S_x = 0$ je asymptoticky stabilní pro $S_x < S_y^{D0}$ a asymptoticky nestabilní pro $S_y > S_y^{D0}$ [24], kde

$$S_y^{D0} = \frac{1}{\omega_+} \cos^{-1} \left[\frac{\alpha^2 b^2}{\omega_+^2 + 4\alpha^2 b^2} \right] \quad (3.3.25)$$

$$D_y = \sqrt{(2\beta^2 - 2\alpha^2 - \alpha\beta)^2 + 15\alpha^2\beta^2} \quad (3.3.26)$$

,

Cournotův model se dvěma zpožděními

Nechť **2. krok** $S_x > 0, S_y > 0$

Analogicky postupem jako v 1. kroku dosadíme do rovnice

$$\lambda^2 - \alpha\beta b^2 + 2\alpha b\lambda e^{-\lambda S_x} + 2\beta b\lambda e^{-\lambda S_y} + 4\alpha\beta b^2 e^{-\lambda(S_x+S_y)} = 0$$

za $\lambda = i\omega$, tím obržíme rovnici

$$-\omega^2 - \alpha\beta b^2 + i2\alpha b\omega e^{-i\omega S_x} + i2\beta b\omega e^{-i\omega S_y} + 4\alpha\beta b^2 e^{-i\omega(S_x+S_y)} = 0$$

Rozdělení imaginární a reálné části

$$\begin{aligned} 2\alpha b\omega \sin\omega S_x + 4\alpha\beta b^2 \cos\omega(S_x + S_y) &= \omega^2 + \alpha\beta b(b - 2\omega \sin\omega S_y) =: \{Re\} \\ 2\alpha b\omega \cos\omega S_x - 4\alpha\beta b^2 \sin\omega(S_x + S_y) &= -2\beta b\omega \cos\omega S_y =: \{Im\} \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

Umocnění této soustavy dvou rovnic je ve tvaru

$$\begin{aligned} 4\alpha^2 b^2 \omega^2 \sin^2\omega S_x + 16\alpha^2 \beta b^3 \omega \sin\omega S_x \cos\omega(S_x + S_y) + 16\alpha^2 \beta^2 b^4 \cos^2\omega(S_x + S_y) \\ = \omega^2 + 2\omega^2 \alpha\beta b(b - 2\omega \sin\omega S_y) + \alpha^2 \beta^2 b^2 (b - 2\omega \sin\omega S_y)^2 \\ 4\alpha^2 b^2 \omega^2 \cos^2\omega S_x - 16\alpha^2 \beta b^3 \omega \cos\omega S_x \sin\omega(S_x + S_y) + 16\alpha^2 \beta^2 b^4 \sin^2\omega(S_x + S_y) \\ = 4\beta^2 b^2 \omega^2 \cos^2\omega S_y \end{aligned} \quad (3.3.28)$$

Pro vyjádření omega ze soustavy lze využít součtový vzorec pro goniometrické funkce

$$\begin{aligned} \sin(S_x + S_y) &= \sin S_x \cos S_y + \cos S_x \sin S_y \\ \cos(S_x + S_y) &= \cos S_x \cos S_y - \sin S_x \sin S_y \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

Sečtením soustavy rovnic 3.3.28 a použitím vzorce 3.3.29

$$4\alpha^2 b^2 \omega^2 (\sin^2 \omega S_x + \cos^2 \omega S_x) + 16\alpha^2 \beta^2 b^4 (\sin^2 \omega (S_x + S_y) + \cos^2 \omega (S_x + S_y)) - 16\alpha^2 \beta b^3 \omega (\cos \omega S_x \sin \omega S_x \cos \omega S_y$$

$$+ \cos^2 \omega S_x \sin \omega S_y - \sin \omega S_x \cos \omega S_y \cos \omega S_x + \sin \omega^2 S_x \sin \omega S_y)$$

=

$$(\omega^4 + 2\omega^2 \alpha \beta b^2 + \alpha^2 \beta^2 b^4) - 4\alpha \beta \omega^3 b \sin \omega S_y - 4\alpha^2 \beta^2 b^3 \omega \sin \omega S_y$$

$$+ 4\alpha^2 \beta^2 b^2 \omega^2 \sin^2 \omega S_y + 4\beta^2 b^2 \omega^2 \cos^2 \omega S_y$$

$$4\alpha^2 b^2 \omega^2 + 16\alpha^2 \beta^2 b^4 - 16\alpha^2 \beta b^3 \omega (\sin \omega S_y (\sin^2 \omega S_x + \cos^2 \omega S_x)) \quad (3.3.31)$$

$$= \omega^4 + 2\alpha \beta b^2 \omega^2 + \alpha^2 \beta^2 b^4 + 4\alpha^2 \beta^2 \omega^2 - 4\alpha \beta b \omega (\omega^2 + \alpha \beta b^2) \sin \omega S_y$$

$$\omega^4 + 2\beta^2 (2\beta^2 - 2\alpha^2 + \alpha \beta) \omega^2 - 15\alpha^2 \beta^2 b^4 - 4\alpha \beta (\omega + \alpha \beta b^2) \omega \sin \omega S_y + 16\alpha^2 \beta b^3 \omega \sin \omega S_y = 0$$

Tím jsme převedli soustavu rovnic na tvar

$$\omega^4 + 2\beta^2 (2\beta^2 - 2\alpha^2 + \alpha \beta) \omega^2 - 15\alpha^2 \beta^2 b^4 + 4\alpha \beta b \omega (4\alpha^2 b^2 - \omega^2 - \alpha \beta b^2) \sin \omega S_y = 0$$

V tomto případě řešit charakteristickou rovnici pro ω analyticky, není jednoduché.

Proto použijeme speciální podmínku a to $\alpha = \beta = k$.

$$\omega^4 + 2b^2 k^2 \omega^2 - 15k^4 b^4 + 4k^2 b \omega (3k^2 b^2 - \omega^2) \sin \omega S_y = 0$$

Pro úpravu chceme vytknout člen $(3k^2 b^2 - \omega^2)$ ze zbývajících částí rovnice, dělíme tedy výraz

$$(\omega^4 + 2b^2 k^2 \omega^2 - 15k^4 b^4) / (3k^2 b^2 - \omega^2) = -\omega^2 - 5k^2 b^2$$

Vytknutím výrazu $(3k^2 b^2 - \omega^2)$ a vynásobením (-1) je výsledný tvar

$$(\omega^2 - 3k^2 b^2)(\omega^2 + 5k^2 b^2 - 4k^2 b \sin \omega S_y) = 0$$

Vzhledem k tomu, že druhý činitel je vždy kladný, pak kladné řešení pro ω_+ je jednoznačně určeno jako $\omega_+ = \frac{\sqrt{4 \cdot 3k^2 b^2}}{2} = \sqrt{3}kb$

Pomocí vzorce pro goniometrické funkce 3.3.29, dosazením do rovnice 3.3.27 obdržíme

$$\sin \omega S_x = \frac{2\alpha \beta (\omega^2 + \alpha \beta b^2) + 8\alpha \beta^2 b^3 \omega - 4\alpha \beta b^2 (\alpha \beta b^2 + 2\omega^2) \sin \omega S_y}{4\alpha^2 b^2 (\omega^2 + 4\beta^2 b^2 - 4\beta b \sin \omega S_y)}$$

$$\cos \omega S_x = \frac{\beta^2 b^2 \cos \omega S_y}{\omega^2 + 4\beta^2 b^2 - 4\beta b \sin \omega S_y}$$

Postup je identický jako v 1. kroku. Je nutné učit znaménka derivace $Re[\lambda(S_x)]$ v bodě, kde je $\lambda(S_x)$ čistě imaginární. Opět vyjádříme implicitní derivaci rovnice 3.3.12 proměnnou $(\frac{d\lambda}{dS_x})^{-1} = \frac{dS_x}{d\lambda}$

$$2\lambda - 2ab\lambda e^{-\lambda S_x} S_x + 2abe^{-\lambda S_x} - 2ab\lambda^2 e^{-\lambda S_x} \frac{dS_x}{d\lambda} - 2\beta b\lambda e^{-\lambda S_y} S_y + 2\beta be^{-\lambda S_y} - 4\alpha\beta b^2 e^{-\lambda S_x} e^{-\lambda S_y} S_x - 4\alpha\beta b^2 e^{-\lambda S_x} e^{-\lambda S_y} S_y - 4\alpha\beta b^2 \lambda e^{-\lambda S_y} e^{-\lambda S_x} \frac{dS_x}{d\lambda} = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_x}{d\lambda} (-2\lambda(\alpha\beta\lambda e^{-\lambda S_x} + 2\alpha\beta b^2 e^{-\lambda S_x} e^{-\lambda S_y})) &= -2\lambda + 2ab\lambda e^{-\lambda S_x} S_x \\ &\quad - 2abe^{-\lambda S_x} + 2\beta b\lambda e^{-\lambda S_y} S_y - 2\beta be^{\lambda S_y} \\ &\quad + 4\alpha\beta b^2 e^{-\lambda S_x} e^{-\lambda S_y} S_x \\ &\quad + 4\alpha\beta b^2 e^{-\lambda S_x} e^{-\lambda S_y} S_y \end{aligned}$$

$$\frac{dS_x}{d\lambda} = \frac{f}{g}, \text{ kde}$$

$$\begin{aligned} f &= -2\lambda + 2ab\lambda e^{-\lambda S_x} S_x - 2abe^{-\lambda S_x} + 2\beta b\lambda e^{-\lambda S_y} S_y - 2\beta be^{\lambda S_y} \\ &\quad + 4\alpha\beta b^2 e^{-\lambda S_x} e^{-\lambda S_y} S_x + 4\alpha\beta b^2 e^{-\lambda S_x} e^{-\lambda S_y} S_y \\ g &= -2\lambda(\alpha\beta\lambda e^{-\lambda S_x} + 2\alpha\beta b^2 e^{-\lambda S_x} e^{-\lambda S_y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f \cdot e^{\lambda S_x} &= -2\lambda e^{\lambda S_x} + 2ab\lambda S_x - 2ab + 2\beta b\lambda e^{-\lambda S_y} e^{\lambda S_x} S_y - 2\beta be^{\lambda S_y} e^{\lambda S_x} \\ &\quad + 4\alpha\beta b^2 e^{-\lambda S_y} S_x + 4\alpha\beta b^2 e^{-\lambda S_y} S_y \\ g \cdot e^{\lambda S_x} &= -2\lambda(\alpha\beta\lambda + 2\alpha\beta b^2 e^{-\lambda S_y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dS_x e^{\lambda S_x}}{d\lambda e^{\lambda S_x}} : \\ \frac{dS_x}{d\lambda} &= \frac{e^{\lambda S_x} (-2\lambda + 2\beta b(\lambda S_y - 1)e^{-\lambda S_y})}{-2\lambda(\alpha b\lambda + 2\alpha\beta b^2 e^{-\lambda S_y})} + \frac{(2ab\lambda + 4\alpha\beta b^2 e^{-\lambda S_y}) S_x}{-\lambda(2ab\lambda + 4\alpha\beta b^2 e^{-\lambda S_y})} - \frac{-2\alpha\beta + 4\alpha\beta b^2 e^{-\lambda S_y}}{-2\lambda(\alpha b\lambda + 2\alpha\beta b^2 e^{-\lambda S_y})} \end{aligned}$$

$$\frac{dS_x}{d\lambda} = \left(\frac{d\lambda}{dS_x} \right)^{-1} = \frac{e^{\lambda S_x} (2\lambda + 2\beta b(-\lambda S_y + 1)e^{-\lambda S_y})}{2\lambda(\alpha b\lambda + 2\alpha\beta b^2 e^{-\lambda S_y})} - \frac{S_x}{\lambda} + \frac{2\alpha\beta - 4\alpha\beta b^2 e^{-\lambda S_y}}{2\lambda(\alpha b\lambda + 2\alpha\beta b^2 e^{-\lambda S_y})}$$

Do rovnice 3.3.32 dosadíme hodnotu $e^{\lambda S_x}$ vyjádřenou z rovnice 3.3.12

$$\lambda^2 e^{\lambda S_x} - \alpha \beta b^2 + 2\alpha b \lambda + 2\beta b \lambda e^{-\lambda S_y} e^{\lambda S_x} + 4\alpha \beta b^2 e^{-\lambda S_y} = 0$$

a vyjádříme proměnnou

$$e^{\lambda S_x} = \frac{-2(\alpha b \lambda + 2\alpha \beta b^2 e^{-\lambda S_y})}{\lambda^2 - \alpha \beta b^2 + 2\beta b \lambda e^{-\lambda S_y}}$$

Proto

$$\begin{aligned} \left[\frac{d(Re\lambda)}{dS_x} \right]_{\lambda=i\omega_+} &= \\ &= \left[Re \left(\frac{d\lambda}{dS_x} \right)^{-1} \right]_{\lambda=i\omega_+} \\ &= \left[\frac{\frac{-2\alpha\lambda + 4\alpha\beta b^2 e^{-\lambda S_y}}{\lambda^2 - \alpha\beta b^2 + 2\beta b \lambda e^{-\lambda S_y}} \cdot \frac{-2\lambda + 2\beta b(\lambda S_y - 1)e^{-\lambda S_y}}{1} - 2\alpha\beta + 4\alpha\beta b^2 e^{-\lambda S_y}}{-2\lambda(\alpha b \lambda + 2\alpha \beta b^2 e^{-\lambda S_y})} \right]_{\lambda=i\omega_+} \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

Hledáme reálnou část, tudíž člen $\frac{-S_x}{\lambda}$ je čistě imaginární a vynecháme jej ve výpočtu. Postupně i vynecháváme i ostatní čistě imaginární členy, úpravou získáme

$$\begin{aligned} &= \left[\frac{-4\beta^2 b^2 \omega_+ + 2\alpha b(2\omega_+^2 + \alpha\beta b^2) \sin\omega_+ S_y + 2\beta b \omega_+ (\alpha\beta b^2 + \omega_+^2) S_y \cos\omega_+ S_y}{\omega_+ (4\beta^2 b^2 \omega_+^2 + (\alpha\beta b^2 + \omega_+^2)^2 - 4\beta b(\alpha\beta b + \omega_+^2) \omega_+^2 \sin\omega_+ S_y)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{8\alpha^2 \beta b^3 \sin\omega_+ S_y + 8\alpha^2 \beta b^3 \omega_+ S_y \cos\omega_+ S_y - 4\alpha^2 b^2 \omega_+}{\omega_+ (4\alpha^2 b^2 \omega_+^2 + 16\alpha^2 \beta b^3 \omega_+ \sin\omega_+ S_y)} \right] \\ &= [8\alpha\beta b^4 (\alpha^2 - \beta^2) + 2\omega_+ (\alpha\beta b^2 + \omega_+^2) + 2\beta b(4\alpha^2 b^3 - \alpha\beta b^2 - 3\omega_+^2) \sin\omega_+ S_y \\ &\quad + 2\beta b(4\alpha^2 b^3 - \alpha\beta b^2 - \omega_+^2) \omega_+ S_y \cos\omega_+ S_y] \end{aligned}$$

Pro úpravu konečného vyjádření jsme použili výraz 3.3.30 na str. 86. Za konkrétních podmínek $\alpha = \beta = k$, výraz v poslední závorce zjednodušíme na tvar

$$2\omega_+ (k^2 b^2 + \omega_+^2) - 4kb\omega_+^2 \sin\omega_+ S_y > (8\sqrt{3} - 12)k^2 b^3 > 0. \quad (3.3.33)$$

Odtud získáme

$$\omega_+ = \sqrt{3}kb$$

$$\left. \frac{d(Re\lambda)}{dS_x} \right|_{\lambda=i\omega_+} > 0 \quad (3.3.34)$$

Všechny kořeny přecházející imaginární osu zleva doprava narůstají jako S_x , pokud S_y je zvoleno ze stabilního intervalu.

Závěr kroku 2

Nechť platí $\alpha = \beta = k$, analogicky jako v modelu pro duopol jednoho zpoždění dostáváme závěr, že zpožděný duopolní model se zpožděními $S_x > 0$ a $S_y \in (0, S_y^{D0}]$ je asymptoticky stabilní pro $S_x < S_x^{D0}$ a přechází do nestability pro $S_x > S_x^{D0}$, kde výraz $S_x^{D0} = S_x^{D0}(S_y)$ je definován

$$S_x^{D0}(S_y) = \frac{1}{\omega_+} \cos^{-1} \left[\frac{\beta^2 b^2 \cos \omega_+ S_y}{\omega_+^2 + 4\beta^2 b^2 - 4\beta b \sin \omega_+ S_y} \right] \quad (3.3.35)$$

kde $\omega_+ = \sqrt{3}kb$ [24]

Obdrželi jsme tedy výraz i pro druhé kritické zpoždění $S_x^{D0}(S_y)$. Tato hodnota ω_+ je rovna hodnotě 3.3.22 v kroku 1.

3.3.2 Cournotův model se zpožděním – prostředí Maple

Vlastní řešení této kapitoly bude spočívat v transformaci matematického Cournotova modelu do software Maple, a tím i grafické ověření, působení kritické hodnoty, která přepíná stabilitu dvou firem.

V souladu s předchozími úvahami jako v případě algebraického postupu, budeme vizualizovat duopol ve dvou krocích

1. krok - Cournotův model s jedním zpožděním $S_x = 0 \wedge S_y > 0$ u firmy Y

2. krok - Cournotův model se dvěma zpožděními $S_x > 0 \wedge S_y > 0$ u firmy X i Y

Zvolme $a = 60; b = 1; c_x = 1; c_y = 1$ a pak dosazením do vzorce ekvilibria 3.3.10 pro Cournotův model obdržíme rovnovážné hodnoty

$$E^* = NE = \left(\frac{59}{3}, \frac{59}{3} \right) \approx (19.666, 19.666)$$

Model inicializujeme blízko Nashovy rovnováhy. Tím okamžitě otestujeme stabilitu příslušné rovnováhy E^* Cournotova dynamického modelu.

Je potřeba zavést počáteční podmínky. Zvolme takovéto počáteční podmínky pro oba kroky

$$x(0) = 19, y(0) = 19$$

1.krok – Cournotův model s jedním zpožděním (Maple)

Pro modelování duopolu s jedním zpožděním zvolíme základní dynamický model 3.3.9, u kterého nastavíme časové zpoždění firmy X, jak bylo v kroku 1 na $S_x = 0$.

Nechť jsou vstupní parametry

$$\alpha = 1; \beta = 1; a = 60; b = 1; c_x = 1; c_y = 1$$

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= (59 - y(t) - 2x(t)) \\ \dot{y}(t) &= (59 - 2y(t - S_y) - x(t)) \end{aligned} \quad (3.3.36)$$

▷ V této hře je cílem maximalizace zisku.

▷ Vliv délky jednoho zpoždění firmy Y budeme pro dynamický model 3.3.36 nyní zkoumat.

Vstupní parametry $\alpha, \beta, a, b, c_x, c_y$ nastavíme jako pevně dané, protože jsme konstruovali výpočty pro změnu stability na nestabilitu a naopak, kterou přepíná proměnná S_y^{D0} . To nás vede na změny pouze hodnoty zpoždění S_y .

Dosazením vstupních parametrů do determinantu 3.3.19 a následně do rovnice pro hodnotu omega 3.3.22

$$D = 16 \Rightarrow \sqrt{D} = 4, \omega_+ = \sqrt{3}$$

Vypočteme kritickou hodnotu, kterou vyjádříme na vysoký počet desetinných míst pomocí výpočetního internetového nástroje Wolfram|Alpha³.

$$S_y^{D0} = \frac{\sqrt{3}}{3} \arccos\left(\frac{1}{7}\right) =$$

$$= 0.824137924621917808202034010568486662192229787828065211265$$

První krok nyní rozfázujeme

Fáze I: Nastavíme hodnotu zpoždění reakce firmy na výstup konkurenční firmy z intervalu $S_y \in [0, S_y^{D0})$, v první fázi zvolíme výchylku hodnoty S_y menší než kritickou S_y^{D0} , např. $S_y = 0.8$. Řešení by mělo konvergovat k rovnováze, Cournotově rovnováze, která byla vypočítána, že optimem pro obě firmy je množství $E^* = \left(\frac{59}{3}, \frac{59}{3}\right) \approx (19.666, 19.666)$.

Fáze II: Nastavíme hodnotu zpoždění reakce firmy na výstup konkurenční firmy a to pro takový případ, že výchylku hodnoty S_y od kritické zvolíme nulovou, tedy bude platit $S_y = S_y^{D0}$. Řešení by mělo zobrazit mezistabilitu duopolního modelu.

Fáze III: Nastavíme hodnotu zpoždění reakce firmy na výstup konkurenční firmy a to pro takový případ, že výchylku hodnoty S_y od kritické zvolíme nulovou, tedy bude platit $S_y > S_y^{D0}$. Řešení by mělo zobrazit nestabilitu duopolního modelu.

Zopakujme volbu vstupních parametrů $\alpha = 1; \beta = 1; a = 60; b = 1; c_x = 1; c_y = 1;$

³© 2017 Wolfram Alpha LLC—A Wolfram Research Company. Dostupné z: <http://www.wolframalpha.com/> s dotazem získaným 2017-03-06

Řešení v systému Maple

```

> #vstupni promenne  $\alpha := 1; \beta := 1; a := 60; b := 1; c_x = 1, c_y = 1; k = 1;$ 
> #Determinant =  $(2 \cdot \beta^2 - \alpha \cdot \beta - 2 \cdot \alpha^2)^2 + 15 \alpha^2 \beta^2$ 
> # kriticka hodnota spozdeni  $SyD = \frac{1}{\sqrt{w^2}} \cdot \cosinus \left( \frac{\alpha^2 \cdot \beta^2}{w^2 + 4 \cdot \alpha^2 b^2} \right)^{-1}$ 
>  $\alpha := 1; \beta := 1; a := 60; b := 1;$ 

$$\alpha := 1$$


$$\beta := 1$$


$$a := 60$$


$$b := 1$$

(1)
>  $D = (2 \cdot \beta^2 - \alpha \cdot \beta - 2 \cdot \alpha^2)^2 + 15 \alpha^2 \beta^2;$ 

$$D = 16$$

(2)
>  $\sqrt{D} := \text{sqrt}(16)$ 

$$\sqrt{D} := 4$$

(3)
>  $\#w = b(\sqrt{2 \cdot \beta^2 - \alpha \cdot \beta - 2 \alpha^2} + \sqrt{D})$ 
>  $w := b\sqrt{2 \cdot \beta^2 - \alpha \cdot \beta - 2 \alpha^2} + \sqrt{D};$ 

$$w := \sqrt{3}$$

(4)
>  $SyD := \frac{1}{w} \cdot \arccos \left( \frac{\alpha^2 \cdot \beta^2}{w^2 + 4 \cdot \alpha^2 b^2} \right);$ 

$$SyD := \frac{1}{3} \sqrt{3} \arccos \left( \frac{1}{7} \right)$$

(5)
>  $SyD := \frac{1}{w} \cdot \cos^{-1} \left( \frac{\alpha^2 \cdot \beta^2}{w^2 + 4 \cdot \alpha^2 b^2} \right);$ 

$$SyD := \frac{1}{3} \sqrt{3} \arccos \left( \frac{1}{7} \right)$$

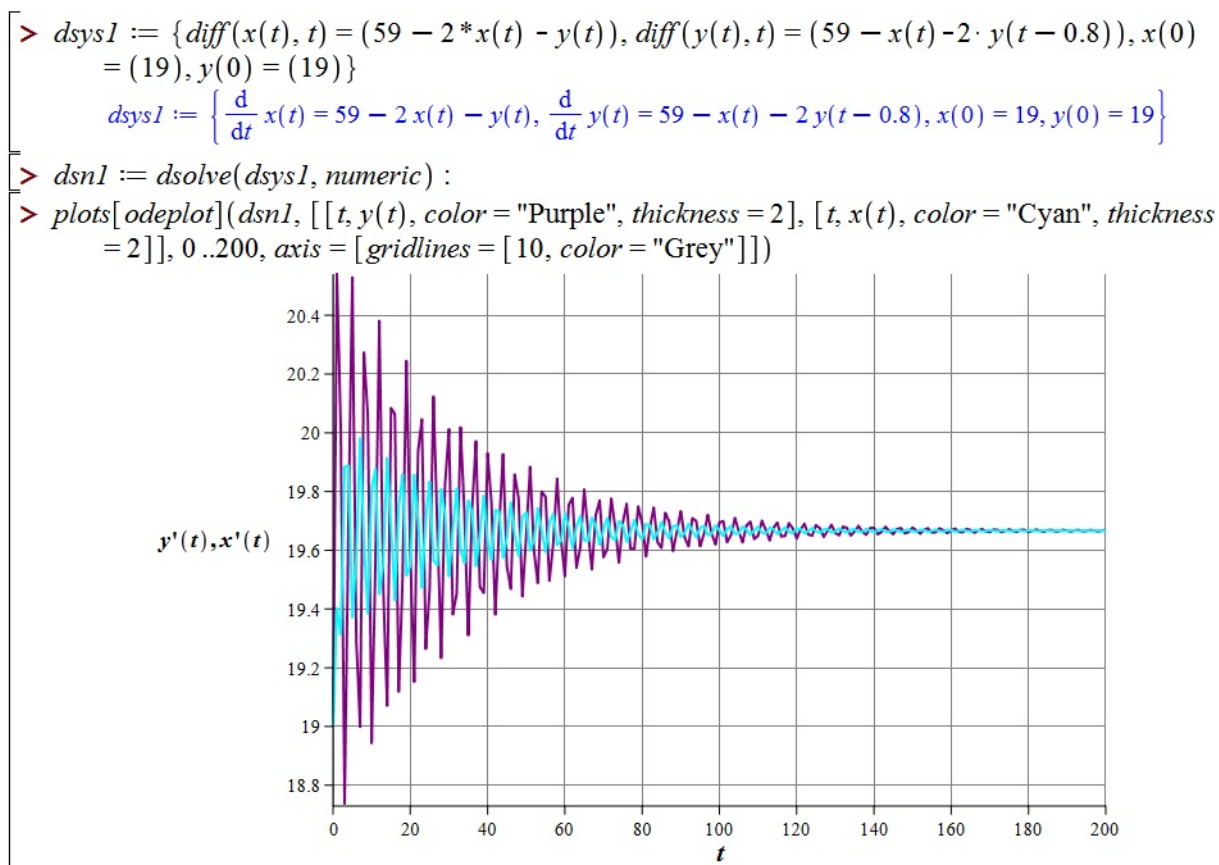
(6)
>  $\frac{1}{3} \sqrt{3} \arccos \left( \frac{1}{7} \right)$ 

$$\frac{1}{3} \sqrt{3} \arccos \left( \frac{1}{7} \right)$$

(7)
>

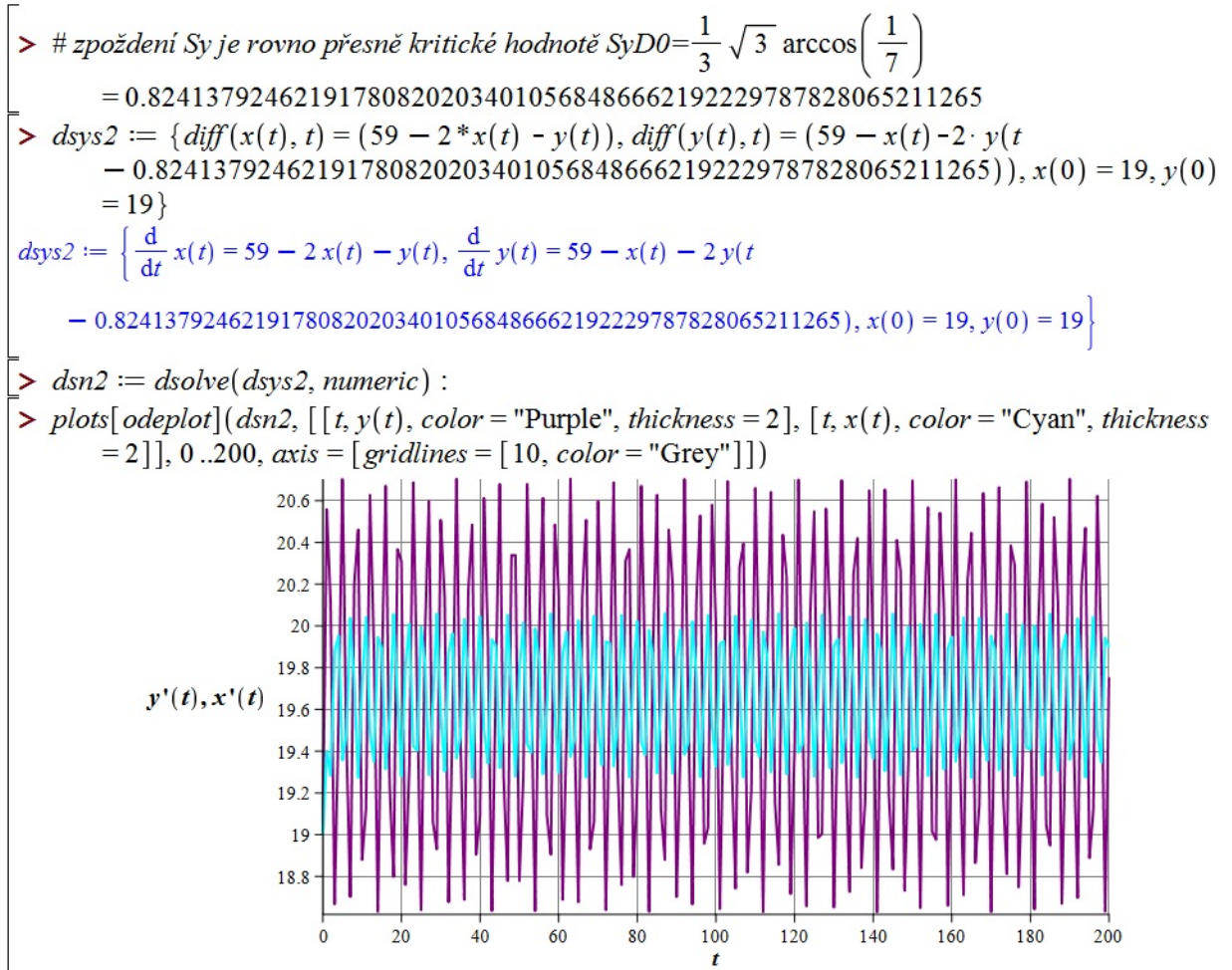
```

Obr. 3.6: Cournotův model a jeho vstupní proměnné (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)



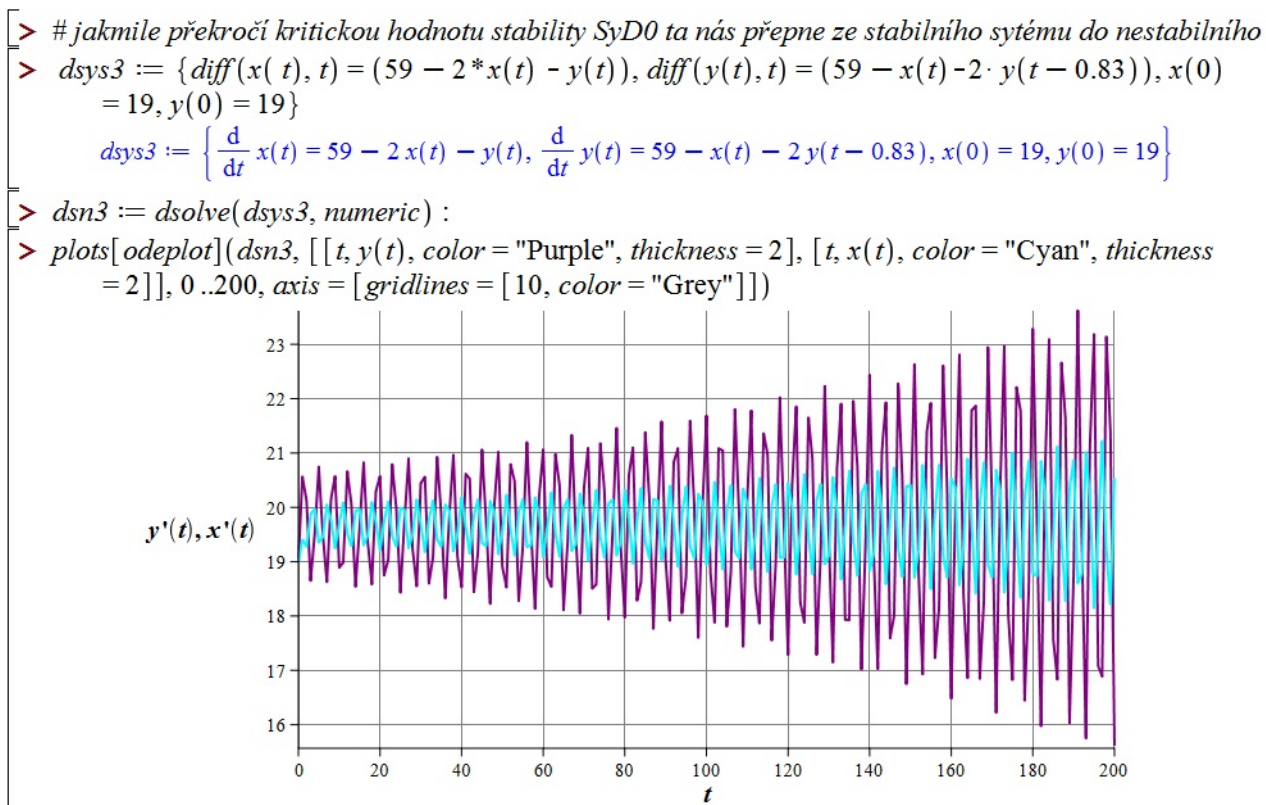
Obr. 3.7: Cournotův model fáze I (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)

Je vidět na obr. 3.7, že skutečně dle očekávání v první fázi, dochází k ustálení systému duopolu v rovnováze $E^* \approx (19.666, 19.666)$ a *hra o trh* je stabilní.



Obr. 3.8: Cournotův model fáze II (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)

Na obr. 3.8 je vidět, že dle očekávání pro fázi II, dochází k rozkmitání systému duopolu kolem rovnováhy $E^* \approx (19.666, 19.666)$ a hra o trh je na mezistabilitě.



Obr. 3.9: Cournotův model fáze III (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)

Pro poslední fázi III duopolu s jedním zpožděním, je vidět dle obr. 3.9, že systém pro duopol se neustálí. *Hra o trh* je nestabilní.

Zavěr 1. kroku

Získali jsme předpokládané modely ve všech třech fázích. Jednotlivé vizualizace duopolu potvrzují vliv *kritické hodnoty* $S_y = S_y^{D0}$ na jeho stabilitu v rámci 1. kroku.

- ▷ Vizualizace na obr. 3.7 potvrdila fázi I, a systém duopolu je stabilní
- ▷ Vizualizace na obr. 3.8 potvrdila fázi II, a systém duopolu je na mezistabilitě
- ▷ Vizualizace na obr. 3.9, v poslední fázi III zobrazila hru duopolu jako nestabilní

2.krok – Cournotův model se dvěma časovými zpožděními (Maple)

Pro modelování duopolu se dvěma zpožděními zvolíme základní dynamický model 3.3.9, u kterého se již vyskytnou obě časová zpoždění jak u firmy X tak u firmy Y, tzn. $S_x > 0, S_y > 0$.

$$\dot{x}(t) = (59 - y(t) - 2x(t - S_x))$$

$$\dot{y}(t) = (59 - 2y(t - S_y) - x(t))$$

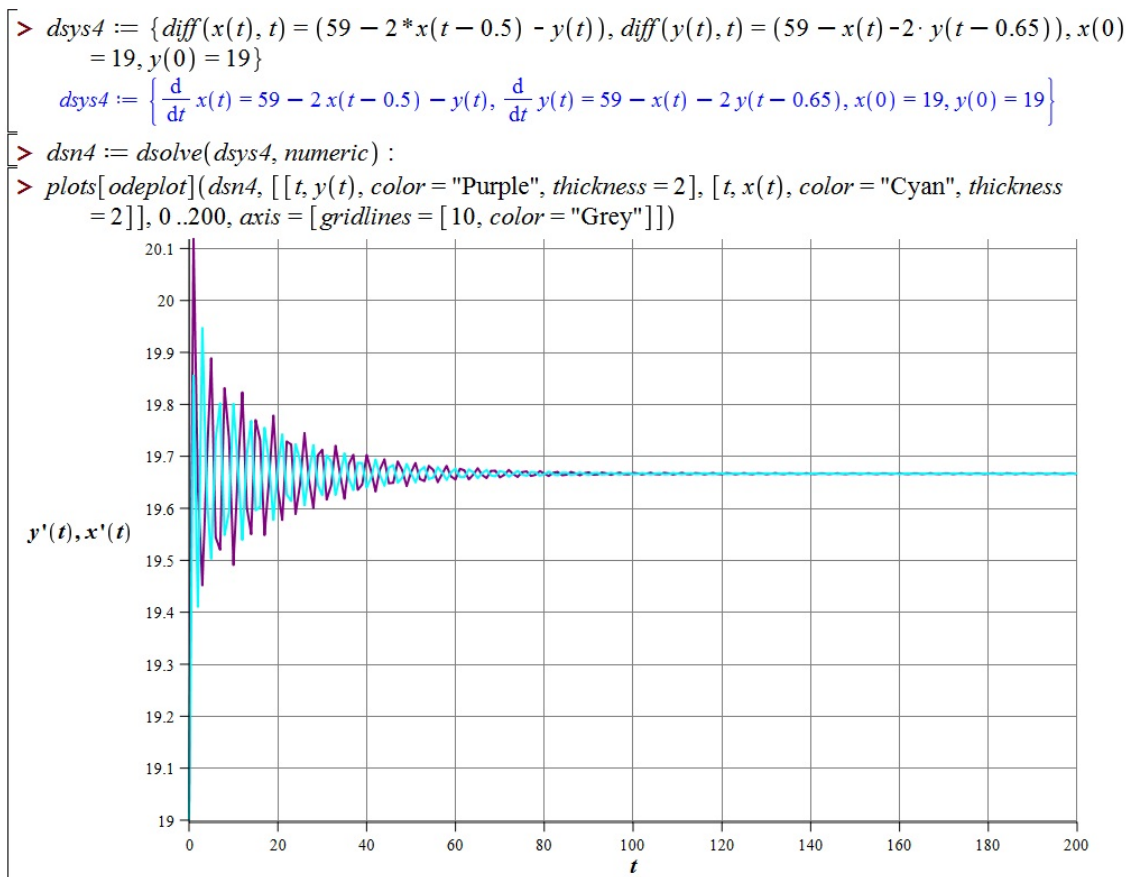
Model rozdělíme opět na fázi IV a na fázi V

```

> #Nastavíme zpoždění z I. fáze Sy=0.65 patřící do intervalu (0,SyD0]=(0,82...]
> α := 1; β := 1; a := 60; b := 1; c_x = 1; c_y = 1; k := 1; Sy := 0.65;
                                     α := 1
                                     β := 1
                                     a := 60
                                     b := 1
                                     c_x = 1
                                     c_y = 1
                                     k := 1
                                     Sy := 0.65
> w := √3 · k · b;
                                     w := √3
> # Vyjádříme kritickou hodnotu druhého zpoždění SxD v proměnné Sy
> SxD(Sy) = 1/w ⋅ ⎛cosinus⎛ $\frac{\beta^2 \cdot b^2 \cos(w \cdot Sy)}{w^2 + 4 \cdot \beta^2 \cdot b^2 - 4 \cdot \beta \cdot b \cdot \sin(w \cdot Sy)}$ ⎞⎞-1;
                                     SxD(0.65) = 1/3 ⋅  $\frac{\sqrt{3}}{\cosinus\left(\frac{\cos(0.65 \sqrt{3})}{7 - 4 \sin(0.65 \sqrt{3})}\right)}$ 
> # Wolfram alpha SxD(0.65)=0.58203690859787105....
    Systém se zpožděním Sx je asymptoticky stabilní pro Sy v intervalu (0, SyD0], pokud je Sx < SxD(Sy)

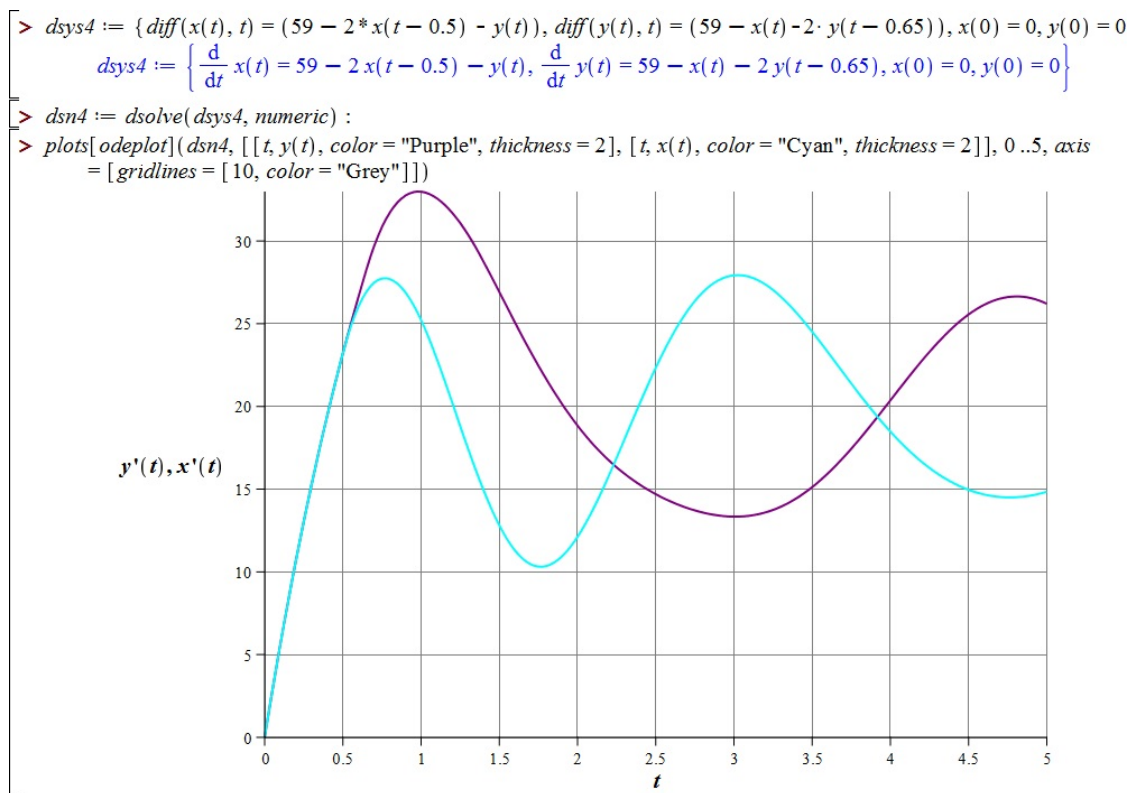
```

Obr. 3.10: Cournotův model vstupní proměnné (dvě zpoždění) (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)



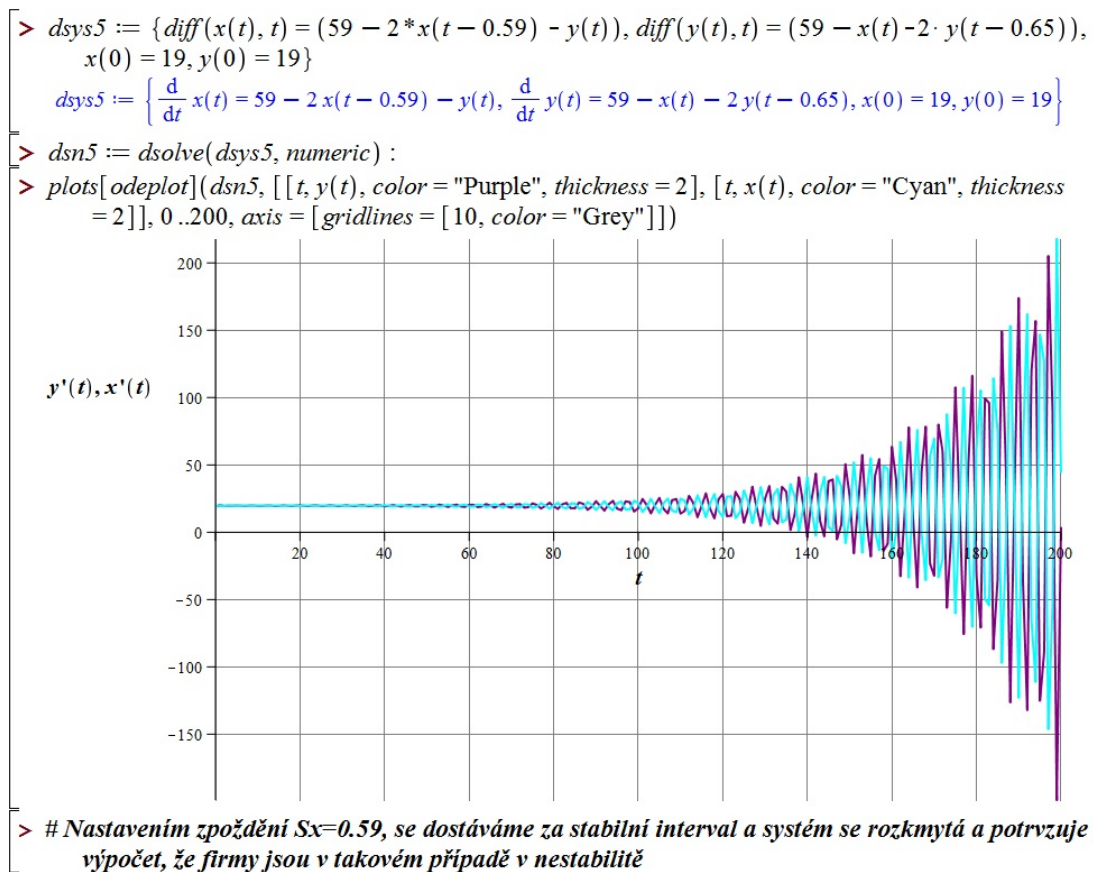
Obr. 3.11: Cournotův model fáze IV (dvě zpoždění) (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)

Je vidět na obr. 3.11, že dle očekávání ve čtvrté fázi 2. kroku, dochází k ustálení systému duopolu se dvěma zpožděními v rovnováze $E^* \approx (19.666, 19.666)$ a hra o trh je stabilní.



Obr. 3.12: Cournotův model fáze IV (dvě zpoždění) detail (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)

Obrázek 3.12 na str. 98 ukazuje detail na počátek hry pro t od 0 do 5. Tento počátek nastavíme na nulovou hodnotu. První firma (modrý signál) tedy volí strategii se zpožděním $S_x = 0.5$, druhá firma (fialová) dostává tuto informaci o strategii první firmy a volí se zpožděním $S_y = 0.65$ vlastní výstup (strategii). Jak je vidět, právě v hodnotě 0.65 se trajektorie křivek rozchází. Jelikož obě zpoždění jsou však v intervalu stability, obě firmy se zase setkají v optimální hodnotě a to v bodě rovnovážného množství pro obě firmy 19.666 [viz obr. 3.11, s. 97].



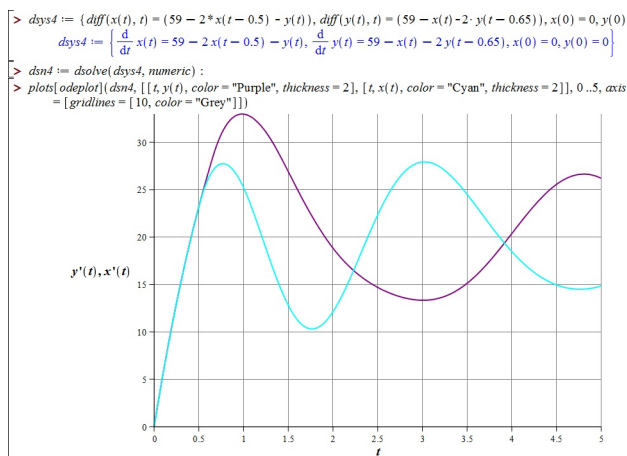
Obr. 3.13: Cournotův model fáze V (dvě zpoždění) (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)

Pro poslední páté fázi 2. kroku pro duopol se dvěma zpožděními, je vidět dle obr. 3.13, že systém duopolu se neustálí. *Hra o trh* je nestabilní.

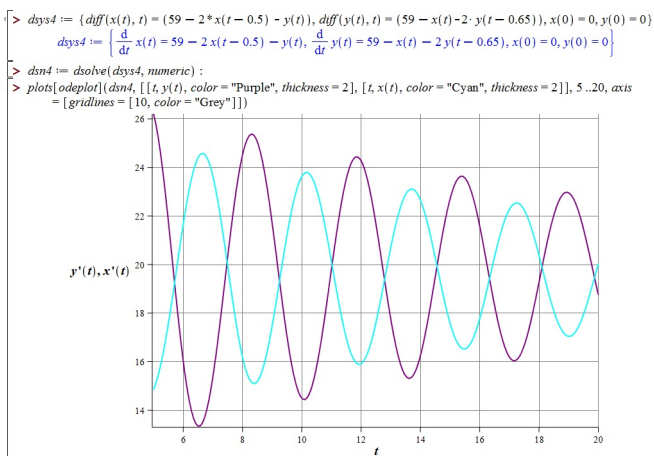
Zavěr 2. kroku

Získali jsme dva předpokládané modely kroku 2. Jednotlivé vizualizace duopolu potvrzují vliv *kritické hodnoty* S_x^{D0} na jeho stabilitu.

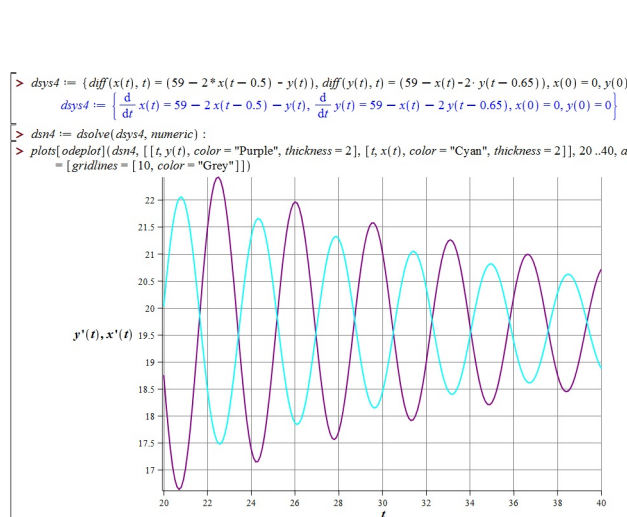
- ▷ Vizualizace na obr. 3.11 potvrdila fázi IV, a systém duopolu je stabilní
- ▷ Vizualizace na obr. 3.13 potvrdila fázi V, a zobrazila hru duopolu jako nestabilní



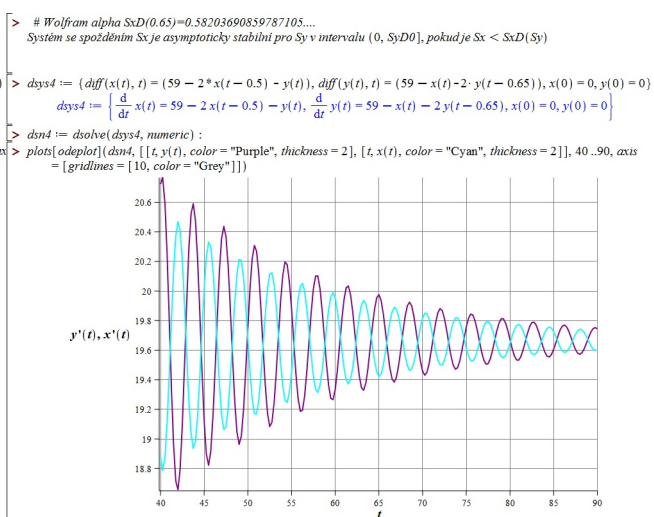
(a) Detail fáze IV pro $t = 0..5$ (dvě zpoždění) (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)



(b) Detail fáze IV pro $t = 5..20$ (dvě zpoždění) (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)



(c) Detail fáze IV pro $t = 20..40$ (dvě zpoždění) (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)



(d) Detail model fáze IV pro $t = 40..90$ (dvě zpoždění) (Maple) (Zdroj: Vlastní zpracování)

Na obr. 3.12 jsme zobrazili detail počátku hry pro fázi IV 2. kroku.

Kde je konec hry?

Jak je vidět, na obr. (a) v intervalu $t = 0..5$ se trajektorie křivek rozcházejí. Postupem času viz obr. (b) pro $t = 5..20$ a viz obr. (c) pro navazující interval $t = 20..40$ se *hra duopolu* blíží do rovnovážného množství (optimální strategie) $E^* = (19.666, 19.666)$. Obr. (d) zobrazuje $t = 40..90$ a ustálení *hry o trh*.

3.4 Shrnutí získaných výsledků

Vstupní parametry byly zvoleny

- ▷ $\alpha = 1, \beta = 1, a = 60, b = 1, c_x = c_y = 1$
- ▷ Hodnotu $\frac{1}{3}\sqrt{3}\arccos(\frac{1}{7})$ pro přehlednost tabulky, zkrátíme na jedno desetinné místo $8.\bar{2}$
- ▷ Hodnotu z Wolfram|Alpha $SxD(0.65) = S_x^{D0} = 0.58203690859787105 \dots$ zaokrouhlíme na 0.58
- ▷ Stabilita – stabilní (S), nestabilní (N), mezistabilní (MZ)

Modely	Sx	Sy	SyD0	SxD(Sy)	Stabilita
dsys1	0	0.8	$8.\bar{2}$	0	S
dsys2	0	$8.\bar{2}$	$8.\bar{2}$	0	MZ
dsys3	0	0.83	$8.\bar{2}$	0	N
dsys4	0.5	0.65	$8.\bar{2}$	0.58	S
dsys5	0.6	0.65	$8.\bar{2}$	0.58	N

Tab. 3.1: Výsledky stability dynamického Cournotova modelu (Zdroj: Vlastní zpracování)

Pro dsys1 pokud je zpoždění menší než kritická hodnota $S_y < S_y^{D0}$ je systém stabilní [viz obr. 3.7], v momentě, kdy je rovno této kritické hodnotě $S_y = S_y^{D0}$, přepíná se do mezistability (dsys2) [viz obr. 3.8]. Po sebemenším překročení zpoždění této kritické hodnoty systém přepíná do nestability dsys3. Je vidět na obrázku 3.9 podstatný jev, a to, že obě firmy nastolí stabilitu v bodě rovnováhy.

Pro fázi IV, kdy se nám už v modelu objeví obě zpoždění firem, nastavíme dle fáze I zpoždění $S_y=0.65$ patřící do intervalu $(0, S_y < S_y^{D0}] = (0, 82 \dots]$ (podmínka omezení). Firma Y tedy realizuje svou strategii se zpožděním. Kritická hodnota zpoždění firmy X, závisí na vstupu S_y , tzn. $S_x^{D0}(0.65) = 0.58203690859787105 \dots$ Systém se zpožděním S_x je asymptoticky stabilní pokud je menší než kritická hodnota, pro S_y v intervalu $(0, S_y < S_y^{D0}]$ [viz obr. 3.11] a asymptoticky nestabilní pokud je zpoždění vyšší jak hodnota kritická [viz obr. 3.13]. Rychlost přizpůsobení vstupu hráče, na základě výstupu množství protihráče může změnit stabilitu rovnováhy. Pokud se navyšuje doba přizpůsobení, rovnováha se stává nestabilní.

4 PŘÍNOS NÁVRHU ŘEŠENÍ

Přínosem návrhu řešení je především získání kritických hodnot S_y^{D0}, S_x^{D0} pro dvě firmy soupeřící o trh (duopol), které poskytují informaci o maximalizaci jejich zisku v čase. Na základě dynamického chování maximalizace zisku byl modelován proces nabízení množství dvou oligopolů nabízejících homogenní produkt. Dále pomocí přiložené *přílohy A* v prostředí systému Maple je intuitivně popsán krok za krokem, jak zobrazit graf duopolu dosazením vstupních hodnot, vypočítat a zobrazit jejich stabilitu.

Při zasáhnutí trhu s konkurencí v něm, je nutné získávat informace o svém protihráči a přizpůsobit tomu i své možnosti nabídky. Pojem nabízené množství nemusí mít podobu jen kvantitativní, ale i v kvalitativní např. dvě vydavatelství tiskovin, která si nejvíce konkurují v průměrném počtu čtenářů, musejí znát i informace z předchozích období, např. jaké informace o článcích, publikacích, fotografiích byly vytištěné konkurencí, aby nedošlo ke ztrátě např. oblíbenosti u spotřebitelů. Pokud se přesuneme od tiskovin k televiznímu vysílání, lze říci, že divák, který uvidí „čerstvou“ novinku na jedné stanici, nebude mít takový užitek, když tu stejnou novinku uvidí o pár hodin později na jiné stanici (jiná televizní stanice začala vysílat se *zpožděním*). Dále se může jednat např. o společnosti v podobě poskytovatelů ERP systémů nebo jiných informačních systémů, pro zjištění, jaká byla jejich efektivita v minulosti při poskytování služeb a které systémy byly pro danou oblast (např. zdravotní pojišťovnictví, bankovníctví, finanční sféry apod.) poskytovány. Tzn. měla být zhodnocena vlastní *minulá rozhodnutí* (strategie) a na tomto základě zvolit *rozhodnutí budoucí*. Tyto procesy zabírají firmám čas, který je může vychýlit z jejich obvyklé rovnováhy.

Uceleně řečeno – v objektivní realitě není většina jevů statických. Každá firma, společnost musí věnovat čas, než plnohodnotné informace zjistí a následně je použije pro svůj vlastní výstup. Proto byly zjištěny kritické hodnoty, které dávají určitý milník, kdy je zpožděná realizace výstupu/produkce/dodávky na trhu firmy/firem ještě ve stabilitě, a obě firmy, i když jsou si konkurencí, dosáhnou společně optimálního zisku. Ustálí v hodnotě Nashovy rovnováhy. Kritická hodnota pracuje s tržní poptávkou, kterou lze dle expertních odhadů nebo empirickými výzkumy určit. V předchozí kapitole *Shrnutí získaných výsledků* jsou zhodnocené veškeré situace duopolu. V 1. kroku byl zkoumán případ výskytu jednoho zpoždění, které se vyskytne u jedné firmy. Následně ve 2. kroku byla řešena situace pro dvě zpoždění, tj. zpoždění vyskytující se u obou firem. Na základě intervalů, do kterých spadala, se konkurenti spolu ocitli ve stabilitě, mezistabilitě anebo nestabilitě.

5 ZÁVĚR

Tato závěrečná kapitola shrnuje význam dosažených výsledků a celkový obsah této práce. Navrhuje další budoucí uplatnění. Diplomová práce se zabývá hledáním řešení konfliktních situací dvou hráčů na určitém trhu.

V Kapitole *Teoretická východiska práce* byly popsány důležité základní struktury matematické, ekonomické nebo finanční oblasti, jejichž propojení se stalo stěžejním podkladem praktické části.

Kapitola *Analýza současného stavu* vytváří průzkum na současné řešení v teorii her a obecné zpracování Cournotova modelu pro duopol – dvě oligopolní firmy, které si navzájem konkurují a chtějí dosáhnout maximalizaci zisku na trhu, kde působí. Tato analýza byla vedena prostřednictvím vybraných softwarových algebraických systémů. Vybrané systémy byly rovněž v této kapitole zhodnoceny. Jde o systémy Maple, MATLAB, R. Systém, který byl vybrán pro stěžejní část práce, byl zvolen Maple 2016. V objektivní realitě jsme předpokládali, že žádná z firem duopolu nemá k dispozici úplné informace o poptávce a snaží se vyvodit odhady na možnou reakci daného trhu. Tato problematika je obsahem navazující kapitoly.

Vlastní návrhy řešení a řešení bylo prováděno

- ▷ Jednak prostřednictvím pokročilých algebraických výpočtů a postupů byly tak získané tzv. *kritické hodnoty*. Tyto kritické hodnoty spolu působily na chování duopolu jako přepínače stability, při jejich rovnovážné produkci. To lze chápat jako určitý milník, kdy jejich současné výstupy (strategie) mohou být zpožděny. V 1. kroku bylo implementováno pouze jedno zpoždění a určila se tak kritická hodnota pouze pro firmu Y. Ve 2. kroku byla implementována zpoždění obě, takže kritická hodnota byla získaná jak pro firmu Y, tak i pro firmu X.
- ▷ Jednak za podpory software Maple 2016 mohlo toto řešení být zpracováno a přehledně vizualizováno grafy. Bylo potvrzeno získané algebraické řešení, že tato zpoždění skutečně působí na celkovou maximalizaci zisku zúčastněných firem. Grafy zobrazily tři různé stavy stability, mezistability, nestability systému dvou firem na základě přepínače (kritické hodnoty).

Výstupy práce lze aplikovat pro další studie pro kteroukoliv parametricky odhadovanou tržní poptávku v prostředí duopolu. Práce spolu s *přílohou A* může sloužit jako řešení dalších problematik v ekonomických a finančních oblastech.

LITERATURA

- [1] AXELROD, R. M. *The evolution of cooperation*. New York: Basic Books, c1984. 264 s. ISBN 0-465-02122-0.
- [2] BÁRTA, T.; PRAŽÁK, D. *Internetová sbírka úloh z obyčejných diferenciálních rovnic: Kapitola – Bifurkace* [online]. Praha: Karlova univerzita v Praze, Matematicko-fyzikální fakulta, Katedra matematické analýzy, 2010. 5 s. [cit. 2017-03-01]. Dostupné z: <<http://www.karlin.mff.cuni.cz/~barta/pcoDR/Kapitola-Bifurkace/Bif3.pdf>>
- [3] BERKA, P. *Inteligentní systémy*. Praha: Oeconomica, 2008. 171 s. ISBN 978-80-245-1436-9. Dostupné také z: <<http://sorry.vse.cz/~berka/docs/4iz430/P03-Teorie%20her.pdf>>
- [4] BISCHI, G.I.; NAIMZADA, A. Global Analysis of a Dynamic Duopoly Game with Bounded Rationality. *Advances in Dynamic Games and Applications* [online]. Boston, MA: Birkhäuser Boston, 2000. vol. 5, s. 361-385 [cit. 2017-04-14]. ISBN 978-1-4612-7100-0. Dostupné z: <http://link.springer.com/10.1007/978-1-4612-1336-9_20>
- [5] BRANISLAV, L. S. *Game Theory: Repeated Games* [online]. Department of Political Science, University of California – San Diego, March 7, 2004 [cit. 2017-01-28]. Dostupné z: <<http://slantchev.ucsd.edu/courses/gt/07-repeated-games.pdf>>
- [6] BURIAN, P. *Internet inteligentních aktivit*. Praha: Grada, 2014. 336 s. Průvodce (Grada). ISBN 978-80-247-5137-5.
- [7] ČERMÁK, J. *Ústní sdělení profesora*. Rozhovor o diferenciálních rovnicích se zpožděním s profesorem doc. RNDr. Janem Čermákem, CSc. Brno: Vysoké učení technické, Fakulta strojní, dne 10. prosince 2016.
- [8] ERNEST, P. *Teorie systémů: Základní pojmy obecné teorie systémů* [online]. [cit. 2016-10-16]. Dostupné z: <<http://labe.felk.cvut.cz/~obitko/xkui/materialy/systemy.pdf>>
- [9] FRIEBELOVÁ, J.; KLICNAROVÁ, J. *Rozhodovací modely pro ekonomy*. České Budějovice: Jihočeská univerzita v Českých Budějovicích, Ekonomická fakulta, 2007. 135 s. ISBN 978-80-7394-035-5.
- [10] GIBBONS, R. *Game theory for applied economists*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, c1992. 288 s. ISBN 06-910-0395-5.

- [11] HOLMAN, R. *Mikroekonomie: středně pokročilý kurz*. Praha: C. H. Beck, 2002. 576 s. ISBN 80-7179-737-5.
- [12] HŘEBÍČEK, J.; POSPÍŠIL, Z.; URBÁNEK, J. *Úvod do matematického modelování s využitím Maple*. Brno: Akademické nakladatelství CERM, 2010. 118 s. ISBN 978-80-7204-691-1. Dostupné také z: <<https://www.iba.muni.cz/res/file/ucebnice/hrebicek-uvod-do-matematickeho-modelovani.pdf>>
- [13] HYKŠOVÁ, M. *Teorie her* [online]. České vysoké učení technické v Praze, Fakulta dopravní, 2007 [cit. 2017-05-15]. Dostupné z: <<http://physics.ujep.cz/~jskvor/MatematikaII/AplikovanaMatematikaCVUT/Teorie%20her/hry.pdf>>
- [14] CHVÁTALOVÁ, Z. *Malý Maple manuál*. Vybrané prostředky pro ekonomické modelování se systémem Maple [online]. 2009. 28 s., poslední revize 2.5.2014 [cit. 2016-03-20]. Dostupné z: <http://www.maplesoft.cz/wp-content/uploads/2014/05/manual_chvatalova.pdf>
- [15] CHVÁTALOVÁ, Z.; HŘEBÍČEK, J.; KOCH, M.; KALABIS, P. *Corporate Performance Analysis Using the Maple system: Integration of Theory and Practice. Perspectives of Business and Entrepreneurship Development*. Brno, Czech Republic: Faculty of Business and Management Brno University of Technology, 2015. s. 44-44, 14 s. ISBN: 978-80-214-5198-8.
- [16] CHVOJ, M. *Pokročilá teorie her ve světě kolem nás*. Praha: Grada Publishing, a.s., 2013. 232 s. ISBN 978-80-247-4620-3.
- [17] JINDRA, V. *Optimální výstup firmy v podmínkách oligopolu* [online]. [cit. 2017-03-13]. Dostupné z: <http://edu.uhk.cz/~jindrvo1/files/miek2/texty/11_optimalni_vystup_firmy_v_podminkach_oligopolu.pdf>
- [18] JURA, P. *Signály a systémy. Část 2: Spojité systémy* [online]. 2. vyd. Brno: Vysoké učení technické, Fakulta elektrotechniky a komunikačních technologií, 2010. 78 s. [cit. 2017-03-19]. Dostupné z: <<https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=dnV0YnIuY3p8aXRzcHxneDo0ZjJkZTVjMmVkY2MyMjUw>>
- [19] KOLMANOVSKIJ, Vladimir Borisovič a Anatolij Dmitrijevič MYŠKIS. *Introduction to the theory and applications of functional differential equations*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, c1999. Mathematics and its applications, vol. 463. 648 s. ISBN 0-7923-5504-0.

- [20] MAPLE. *Maplesoft, a division of Waterloo Maple Inc., Waterloo, Ontario* [online]. [cit. 2016-12-28]. Dostupné z: <<http://www.maplesoft.com>>
- [21] MARKL, J. *Teorie her a modely rozhodování v podmínkách neurčitosti* [online]. Ostrava: VŠB-Technická univerzita Ostrava, Fakulta elektrotechniky a informatiky, Katedra informatiky. [cit. 2016-12-06]. Dostupné z: <http://www.cs.vsb.cz/sawa/teh/ucebni_text/TEH_2_2006.pdf>
- [22] MARUŠIAK, P.; OLACH R. *Funkcionálne diferenciálne rovnice*. Žilina: Žilinská univerzita, 2000. Monografie (Žilinská univerzita). 133 s. ISBN 80-7100-714-5.
- [23] MATLAB. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2010 [online]. [cit. 2016-11-20]. Dostupné z: <<https://www.mathworks.com/products/matlab.html>>
- [24] MATSUMOTO A.; SZIDAROVSKY F.; YOSHIDA H. *Dynamics in Linear Cournot Duopolies with Two Time Delays*. Computational Economics, 2011. 15 s. 38: 311. Dostupné z: doi: [10.1109/AICCSA.2011.6126582](https://doi.org/10.1109/AICCSA.2011.6126582)
- [25] MAZALOV, V. V. *Mathematical game theory and applications*. The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex, United Kingdom, PO19 8SQ: John Wiley, 2014, 431 s. ISBN 978-111-8899-625.
- [26] MEZNÍK, I. *Úvod do matematické ekonomie pro ekonomy*. Brno: Fakulta podnikatelská Vysokého učení technického v Brně, 2011. 186 s. ISBN 978-80-214-4239-9.
- [27] MEZNÍK, I. *Matematika II*. Vyd. 8. Brno: Zdeněk Novotný, 2003. Studijní text pro studium BA Hons. 110 s. ISBN 80-86510-67-0.
- [28] NEUMANN, John a Oskar MORGENSTERN. *Theory of games and economic behavior*. Princeton: Princeton University Press, 1990. 641 s. ISBN 0-691-00362-9.
- [29] NOVOTNÁ, V.; LUHAN, J. *Modelování Phillipsovy křivky s podporou systému Maple*. Systémová integrace, 2012, roč. 2012, č. 1, s. 151-163. ISSN: 1210-9479.
- [30] PERINGER, P. *Modelování a simulace*. Vysoké učení technické v Brně, fakulta informačních technologií. [cit. 2016-10-17]. (Verze: 20. září 2016). Dostupné z: <<http://www.fit.vutbr.cz/study/courses/IMS/public/prednasky/IMS.pdf>>

- [31] POLAK, B. *Game Theory*. Přednáška. In: *Youtube* [online]. Zveřejněno 20.11.2008. Connecticut: Yale University, 2007. [cit.2016-11-10]. Dostupné z: <<https://www.youtube.com/watch?v=nM3rTU927io&list=PL6EF60E1027E1A10B>>
- [32] PRISNER, E. *Game Theory Through Examples*. Franklin University Switzerland. Mathematical Association of America, Inc., 2014. 308 s. ISBN 978-161444-115-1.
- [33] R Core Team (2014) [online]. R: *A language and environment for statistical computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. [cit. 2016-03-20]. ISBN 3-900051-07-0. Dostupné z: <<http://www.R-project.org/>>
- [34] ROMP, G. *Game theory: introduction and applications*. New York: Oxford University Press, 1997. 284 s. ISBN 01-987-7502-4.
- [35] Sîrghi, Nicoleta and Neamțu, Mihaela and Străin, Petru Claudiu. *Analysis of a Dynamical Cournot Duopoly Game with Distributed Time Delay* [online]. Timisoara Journal of Economics and Business 2015, V(8), 13 s. [cit.2017-05-09]. Dostupné z: <<http://EconPapers.repec.org/RePEc:wun:timjeb:tjeb:v08:y2015:i01s:a01>>
- [36] ŠRÉDL, K.; SVOBODA, R. Oligopolní konkurence s dominantní firmou a obchodní řetězce. *Trendy ekonomiky a managementu* [online]. Vysoké učení technické v Brně, Fakulta podnikatelská, 2011, V(9), s. 99-105 [cit. 2017-02-02]. ISSN 1802-8527. Dostupné z: <<http://hdl.handle.net/11012/19606>>
- [37] ŠOLC F.; VÁCLAVEK P.; VAVŘÍN P. *Řízení a regulace II, Analýza řízení nelineárních systému* [online]. Ver. 1.27. VUT Brno, 2011 [cit. 2017-22-02]. s. 120. Dostupné z: <http://matlab.fei.tuke.sk/orhs/subory/podklady/Regulace_a_rizeni_II_skripta_11_dobre.pdf>.
- [38] TKADLEC, J. *Diferenciální rovnice. Laplaceova transformace*. ČVUT, Praha, 2005. 86 s. ISBN 80-01-03207-8.
- [39] WAGNEROVÁ, R. MINÁR, K.: *Prezentační a výukový modul pro oblast analýzy regulačních obvodů v prostředí Intranetu* [online]. Ostrava: VŠB-TUO, KATRŘ, 2000. [cit.2016-04-05]. Dostupné z: <<http://books.fs.vsb.cz/Analyza/prvni.html>>
- [40] WOLFRAM RESEARCH, Inc. [online]. Mathematica, Version 11.1, Campaign, IL (2017). [cit.2017-02-05]. Dostupné z: <<http://www.wolfram.com/>>

SEZNAM SYMBOLŮ, VELIČIN A ZKRATEK

CAS	počítačové algebraické systémy – Computer Algebra System
FE	funkcionální rovnice – Functional Equation
ICT	informační a komunikační technologie – Information and Communication Technologies
ODEs	obyčejné diferenciální rovnice – Ordinary Differential Equation
ODDEs	obyčejné diferenciální rovnice se zpožděním – Ordinary Delay Differential Equation
NE	Nashova rovnováha – Nash Equilibrium
Z	strategie zradit
K	strategie kooperovat
V-K	strategie vždy kooperovat
V-Z	strategie vždy zradit
TFT	strategie oko za oko – Tit For Tat
$c_i q_i$	náklady i –té firmy
$TC(q_i)$	celkové náklady i –té firmy pro množství produkce q_i
$MC(q_i)$	mezní náklady i –té firmy pro množství produkce q_i
$TR(q_i)$	celkové příjmy i –té firmy pro množství q_i
$\pi_i(q_i, q_j)$	zisk i –té firmy pro množství q_i a q_j konkurenta
$x_k(t)$	zisk k –té firmy pro množství x a y konkurenta v dynamickém modelu
S_y	hodnota časového zpoždění u firmy Y
S_y^{D0}	kritická hodnota časového zpoždění u firmy Y
S_x	hodnota časového zpoždění u firmy X
$S_x^{D0}(S_y)$	kritická hodnota časového zpoždění u firmy X pro hodnotu S_y
G	hra dvou hráčů v normálním tvaru
$P(Q)$	cena při celkovém množství Q produkce
Q	celkové množství produkce firem v daném odvětví
s_i	strategie hráče i
$s_j = t_j$	strategie hráče j
$S_i = S$	množina všech strategií hráče i
$S_j = T$	množina všech strategií hráče j
s_1, \dots, s_n	kombinace všech možných strategií hráče i
t_1, \dots, t_m	kombinace všech možných strategií hráče j
$u_i(s_i, s_j)$	výplata pro hráče i při volbě strategií s_i a t_j
U_i	matice všech výplat hráče i
$U = \{u_{ij}\}_{i,j \in \{1,2\}}$	výplatní dvojmatice obou hráčů
$u_{ij} = (U_1(i, j), U_2(i, j)), i, j \in \{1, 2\}$	prvek v dvojmatici výplat na pozici i, j

SEZNAM PŘÍLOH

A	Obsah přiloženého CD	110
A.1	Příkazy používané ve zdrojových souborech	110

A OBSAH PŘÍLOŽENÉHO CD

Příloha obsahuje elektronickou verzi diplomové práce a zdrojové soubory psané v prostředí software Maple 2016, obsahující především grafické zpracování dynamického Cournotova modelu a izoziskové křivky statického Cournotova modelu. Zdrojové soubory obsahují i popisky před příkazy pro uživatelskou přehlednost.

- ▷ DP ve formátu pdf.
- ▷ ONE_DelayCournot_init_nash.mw (testované ve verzi Maple 2016)
- ▷ TWO_DelayCournot_init_nash.mw (testované ve verzi Maple 2016)
- ▷ iso_profit_duopoly.mw (testované ve verzi Maple 2016)

A.1 Příkazy používané ve zdrojových souborech

Tab. A.1: Přehled příkazů pro prostředí Maple 2016

Příkaz	Význam
<code>diff(f, x1, ..., xj)</code>	parciální derivace fce f podle x
<code>isolate(eqn, expr)</code>	vypočítá rovnici pro expr
<code>plot(f, x=x0..x1)</code>	2D graf fce f v rozsahu x0 až x1
<code>subs(x=a,expr)</code>	substituce a za x v expr
<code>plot3d(f,x=a..b,y=c..d,opts)</code>	3D graf funkce f
<code>contourplot(expr,x=a..b,y=c..d,opts)</code>	množina křivek expr, pro diskrétní množinu hodnot
<code>dsolve(ODE,nume)</code>	řešení ODE numericky